



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO - MATEMATIČKI FAKULTET  
GEOFIZIČKI ODSJEK



IVANA MARINOVIC

# ENERGETIKA BLAGO NELINEARNOG PRANDTLOVOG MODELA

DIPLOMSKI RAD

VODITELJ: PROF. DR. SC. BRANKO GRISOGONO  
SUVODITELJ: DR. SC. IVAN GÜTTLER

Zagreb, 2015.

Ovaj diplomski rad je izrađen na Geofizičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu pod vodstvom dr. sc. Ivana Güttlera iz Državnog hidrometeorološkog zavoda i prof. dr. sc. Branka Grisogona. Rad je djelomice potpomognut projektima Hrvatske zaklade za znanost CATURBO, br. 09/151 i CARE, br. 2831, te projektom Češke zaklade za znanost GAČR, br. 14-12892S.

Zahvaljujem se mentoru, prof. dr. sc. Branku Grisogonu, i domentoru, dr. sc. Ivanu Güttleru, na motivaciji, strpljenju, savjetima i prenesenom znanju tijekom izrade diplomskog rada i studiranja. Zahvaljujem se članovima komisije, doc. dr. sc. Maji Telišman Prtenjak i doc. dr. sc. Snježani Markušić, kao i ostalim djelatnicima Geofizičkog zavoda što su mi svojim radom i entuzijazmom približili geofizičke znanosti i tako me potakli da ih još više zavolim.

Hvala mojim roditeljima, bratu i sestri na bezuvjetnoj podršci i potpori, na ohrabrvanju i poticajima, na strpljenju i razumijevanju u svim trenucima moga života. Hvala mojoj rodbini i priateljima koji nikad nisu posumnjali u to da će postati prva blatska meteorologinja. Zahvaljujem se svim kolegama na pomoći, bodrenju i suošćećanju, posebno tijekom ispitnih rokova, te na druženjima, šalama i svim dogodovštinama koje su moje studiranje učinili predivnim razdobljem života. I na kraju hvala dragom Bogu što sam preko trnja uspješno došla do zvijezda, tj. do diplome.

# Sadržaj

<b>1 Uvod</b>	<b>1</b>
1.1 Atmosferski granični sloj . . . . .	1
1.2 Model katabatičkog strujanja . . . . .	3
1.3 Klasični Prandtlov model . . . . .	5
1.4 Modificirani Prandtlov model . . . . .	9
1.4.1 Blago nelinearni Prandtlov model s konstantnom turbulentnom difuzivnosti . . . . .	9
1.4.2 Blago nelinearni Prandtlov model s varijabilnom turbulentnom difuzivnosti . . . . .	15
1.4.3 Katabatičko i anabatičko strujanje . . . . .	18
<b>2 Cilj i metoda rada</b>	<b>21</b>
<b>3 Rezultati i diskusija</b>	<b>25</b>
3.1 Katabatičko strujanje . . . . .	25
3.1.1 Linearan slučaj . . . . .	25
3.1.2 Nelinearan slučaj . . . . .	27
3.2 Anabatičko strujanje . . . . .	30
3.2.1 Linearan slučaj . . . . .	30
3.2.2 Nelinearan slučaj . . . . .	32
3.3 Modelirana energetika katabatičkog i anabatičkog strujanja . . . . .	35
<b>4 Zaključak</b>	<b>40</b>
<b>Literatura</b>	<b>44</b>
<b>Dodatak A</b>	<b>50</b>

# 1 Uvod

Vjerojatno jedan od najzanimljivijih slojeva atmosfere je najniži sloj troposfere, tzv. atmosferski granični sloj (AGS, eng. atmospheric boundary layer), odnosno sloj u kojem živimo. Sva zbivanja u njemu direktno utječu na čovjeka i njegove aktivnosti, pa nam je razumijevanje dinamike i termodynamike tog sloja od velike važnosti. Ovaj rad bavi se jednim njegovim segmentom - katabatičkim i anabatičkim strujanjem nad uniformnom kosinom. U uvodnom dijelu ukratko je opisan AGS i navedene karakteristike katabatičkog i anabatičkog strujanja, a potom su detaljno razrađeni klasični i modificirani Prandtlov model kojima ovdje opisujemo ta strujanja. Istraživanje energetike klasičnog i modificiranog Prandtlovog modela kao cilj ove radnje predstavljen je u drugom poglavlju i pritom je navedena metoda rada. Dobiveni rezultati za pojedine vrste strujanja prikazani su u trećem poglavlju i pritom su detaljno diskutirani. Sve je sumirano i zaključeno četvrtim poglavlјem.

## 1.1 Atmosferski granični sloj

Spomenuti AGS ili planetarni granični sloj (eng. planetary boundary layer) je donji dio troposfere koji je pod direktnim utjecajem Zemljine površine (ponajprije mehaničkim i termičkim utjecajem). Varijabilan je u prostoru i vremenu (oko 1 km, te 1 h i manje; npr. Stull, 1988.). Uz standardne uvjete u atmosferi u umjerenim geografskim širinama proteže se do otprilike 1 km od podlage, te sadrži  $\sim 10\%$  mase atmosfere.

Postoji značajan dnevni i godišnji hod debljine AGS-a. U našim izvantropskim širinama je dublji danju i ljeti, a znatno pliči i stabilniji noću i zimi. Sukladno tome, razlikujemo statički nestabilni (konvektivni), neutralni i stabilni stratificirani AGS. Sunčev zagrijavanje tijekom topnih sunčanih dana destabilizira AGS i potiče razvoj konvekcije. Pritom AGS može narasti i do nekoliko kilometara visine. Tijekom mirnih i vedrih noći tlo se hlađi i hladnije je od okolnog zraka, pa nema jakih vertikalnih gibanja i turbulencija je slaba i sporadična. Takav AGS je statički stabilan (SGS, stabilan granični sloj) i ponekad doseže visinu od samo nekoliko desetaka metara. Pošto se često formira noću nad kopnom još ga nazivamo i noćni AGS. Osim radiacijskim ohlađivanjem, SGS može nastati i prilikom advekcije toplijeg zraka nad hladniju površinu (npr. Stull, 1988.).

Iako vjetar uz tlo često noću postaje slab ili iščezava, brzine vjetra na većim

visinama mogu biti velike. To usko područje pojačanog vjetra u donjoj troposferi, s maksimumima od  $10 - 20$  m/s smještenima na  $100 - 300$  m visine, nazivamo niskom mlaznom strujom (NMS, eng. low-level jet) ili noćnom mlaznom strujom (eng. nocturnal jet), obzirom da se javlja tokom noći, a maksimum postiže prije zore. Jedna od definicija NMS-a kaže da se ona može javiti unutar najnižih 1500 m atmosfere gdje je maksimum brzine vjetra za više od 2 m/s veći od brzine vjetra iznad njega (npr. Stull, 1988.). Postojanje NMS-a ukazuje na postojanje značajnog smicanja vjetra.

Iako su efekti viskoznosti u AGS-u dominantni, pripadna dinamika strujanja nije direktna posljedica viskoznosti, već činjenice da je atmosfersko strujanje po prirodi turbulentno. Dok u slobodnoj atmosferi (u ostatku atmosfere iznad AGS-a) po pretpostavci zanemarujemo turbulenciju, u AGS-u jednadžbe gibanja moraju uključiti efekte turbulencije. Budući da je AGS gotovo stalno turbulentan, te su nestabilnosti u njemu velike i kontinuirane u vremenu i prostoru, on je pretežno stohastičke, a ne determinističke prirode. Takve kompleksne procese termodinamike i utjecaje Zemljine površine u AGS-u teško je opisati analitičkim, pa čak i numeričkim modelima (npr. Stull, 1988.).

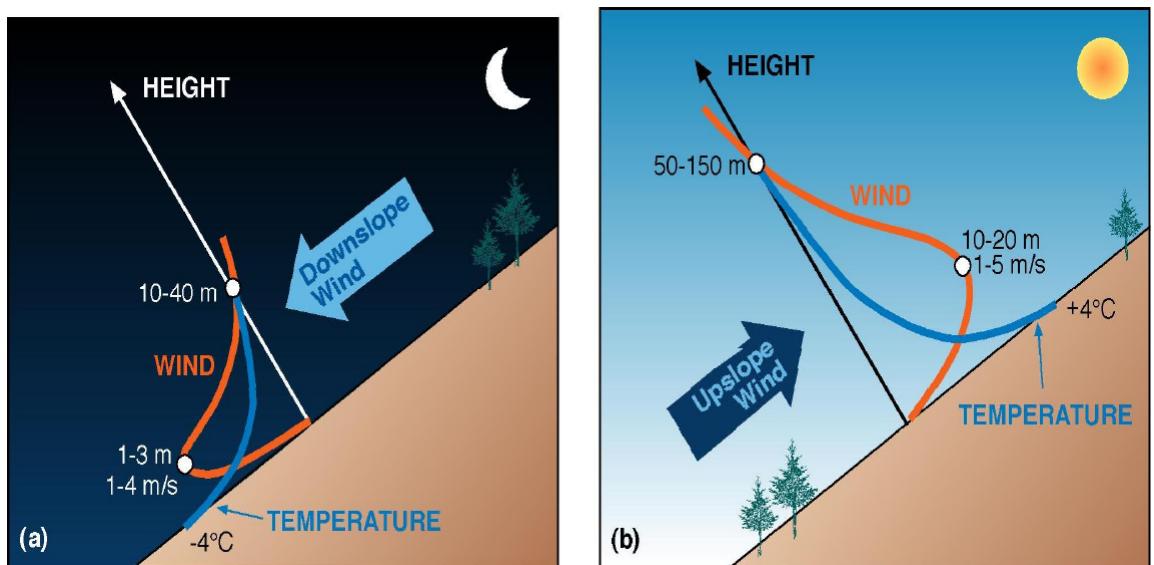
Stohastičku prirodu opisujemo statističkim efektima vrtloga. U razvoju malih turbulentnih vrtloga ključnu, iako indirektnu, ulogu ima viskoznost i tzv. neproklijavajući donji rubni uvjet (eng. no-slip lower boundary condition), tj. iščezavanje brzine na čvrstoj podlozi. Posljedica tog rubnog uvjeta jest da i relativno slab vjetar uzrokuje smicanje blizu površine, što vodi k stvaranju turbulentnih vrtloga. Osim vrtloga nastalih smicanjem, postoje i konvektivni vrtlozi nastali npr. ižaravanjem tla i konvektivnim prijenosom topline u visinu. Ti turbulentni vrtlozi, za razliku od molekularnih procesa, predstavljaju vrlo efektivan način prijenosa impulsa prema površini, te topline i vlage s površine. Oni također održavaju energetsku ravnotežu na površini i ravnotežu impulsa. U AGS-u je tako postignuta ravnoteža strujanja u prvoj aproksimaciji između turbulentnog trenja, Coriolisove sile i gradijenta tlaka (npr. Grisogono i Belušić, 2008a.).

Smicanje vjetra, koje je osnovni uzrok dinamičkih nestabilnosti, u uvjetima statički stabilnog zraka može dinamički uzrokovati turbulenciju. Turbulencija djeli u ultimativno u smislu disipacije, tj. sama sebe dokida. Njen sustav mehanizama pomoću tokova fluida nastoji poništiti uzrok nestabilnosti izjednačavajući prostorne gradijente u strujanju, te smanjiti smicanje vjetra i na taj način stabilizirati sustav (npr. Grisogono i Belušić, 2008a.). Stabilizacijom sustava turbulencija općenito slabi.

## 1.2 Model katabatičkog strujanja

Linearnim modelima katabatičkog strujanja često su predstavljane glavne karakteristike nagnutog, statički stabilnog stratificiranog najdonjeg sloja atmosfere. Prestankom Sunčevog zagrijavanja dolazi do ohlađivanja Zemljine površine. Zrak uz nagnutu podlogu hlađi se brže od zraka koji je na istoj visini, ali dalje od podlage, što dovodi do negativnog uzgona. Hladniji, gušći i teži zrak spušta se niz padinu i uzrokuje nastanak katabatičkog strujanja (lijevo na Slici 1). Takvo strujanje je uobičajena pojava u planinskim područjima (npr. Whiteman, 1990.), te nad blago nagnutim podlogama poput ledenih površina Grenlanda i Antarktike (npr. Klein i sur., 2001.), gdje njihova učestalost doprinosi općoj cirkulaciji atmosfere (npr. Parish i Bromwich, 1991.).

Tijekom dana, kada Sunce zagrijava padinu, zrak neposredno uz podlogu postaje toplij, rjeđi i lakši od okolnog zraka na istoj visini, ali dalje od podlage, te se on počinje uzdizati uz padinu i uzrokuje nastanak anabatičkog vjetra (desno na Slici 1). Ponekad se duž obronka, gdje se uzdiže topli zrak, formiraju kumulusni oblaci poznati kao anabatički oblaci. Brost i Wyngaard (1978.) i Mahrt (1981.) su pokazali da je čak i blagi nagib, oku neprimjetan ( $\Delta z / \Delta x = 0.001$  do  $0.01$ ), nad velikim područjem može uzrokovati nastanak katabatičkog strujanja od 1 do 2 m/s. Stoga možemo očekivati katabatičko strujanje gotovo svugdje unutar nagnutog SGS-a nad kopnom (npr. Stull, 1988.).



Slika 1: Profili perturbiranih potencijalnih temperatura i brzina noćnog katabatičkog i dnevnog anabatičkog vjetra. Height je visina nad podlogom, wind je vjetar, downslope wind je silazni vjetar, a upslope wind je uzlazni vjetar (Whiteman, 2000.).

Osnovna obilježja "čistog" katabatičkog strujanja su izražena NMS i oštar vertikalni temperaturni gradijent pri podlozi (npr. Grisogono i Oerlemans, 2001a,b; King i sur., 2001.). S obzirom na to da katabatičko strujanje pokreće termo-dinamika i da su ekstremne maksimalne brzine strujanja  $\sim 20$  m/s, bura nije katabatički vjetar. Naime, njezin glavni pokretač je orografski lom uzgonski valova (uglavnom hidraulika), a ona je relativno hladan, mahovit, na udare oštar silazni vjetar koji može doseći brzine i do  $\sim 50$  m/s. Početna teorija da je bura katabatički vjetar (npr. Yoshino, 1976.; Jurčec, 1981.) može eventualno vrijediti u početnoj i završnoj fazi kada bura nije jaka ili olujna i ne širi se stotinama kilometara duž obale (npr. Grisogono i Belušić, 2009.).

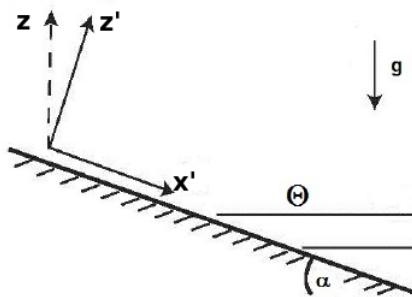
SGS je najčešće loše razlučen u mnogim numeričkim prognostičkim i klimatskim modelima, pa se katabatička strujanja često moraju parametrizirati u modelima na velikim skalama (npr. Zilitinkevich i sur., 2006.). Čak i nehidrostaticki numerički prognostički modeli s finom rezolucijom imaju poteškoća u modeliranju tog strujanja. Jednostavan model katabatičkog strujanja predstavlja ravnotežu produkcije negativnog uzgona, zbog deficita potencijalne temperature na podlozi, i disipacije turbulentnim tokovima (Prandtl, 1942.; Mahrt, 1982.; Egger, 1990.). Modeliranje katabatičkog strujanja je dovoljno uspješno samo ako se primjeni dovoljna vertikalna rezolucija (npr. Renfrew, 2004.). Često problem nastaje već kod mjerjenja katabatičkog strujanja kada se npr. ne može izmjeriti visina NMS-a jer se ona nalazi oko meteorološkog tornja, no još uvijek prenisko za sodar (eng. SONic Detection And Ranging, akustični radar; npr. Renfrew i Anderson, 2006.).

Katabatički tokovi su uvijek prisutni na planinama i kompleksnim terenima gdje postoji osnovni nagib podloge na nekoj zamjetnoj udaljenosti (Nappo i Rao, 1987.; Oerlemans, 2001.) i utječu na lokalnu i regionalnu klimu tih područja (npr. van den Broeke i Lipzig, 2003.), na bilancu mase ledenjaka (npr. Munro, 2004.), na smanjenje i produkciju morskog leda (npr. Barthélemy i sur., 2012.) i energiju vjetra (npr. Horvath i sur., 2011.). Iako je postignut veliki napredak u razumijevanju i kvantitativnom opisu katabatičkog vjetra, i dalje postoje problemi kod modeliranja statički stabilnih stratificiranih turbulentnih tokova niz padinu zbog kompleksne orografije i površinske nehomogenosti (npr. Shapiro i Fedorovich, 2008.), te razumijevanja njihove detaljne strukture (npr. Weng i Taylor, 2003.). Zato je katabatičko i anabatičko strujanje još uvijek bitna tema u mnogim istraživanjima (npr. Princevac i Fernando, 2007.; Fedorovich i Shapiro, 2009.; Shapiro i sur., 2012.; Zardi i Whiteman, 2013.; Grisogono i sur., 2015.).

### 1.3 Klasični Prandtlov model

Klasični (originalni) Prandtlov model je relativno jednostavan analitički model koji opisuje čisto katabatičko strujanje (npr. Mahrt, 1982.; Egger, 1990.; Parmhed i sur., 2004.). Iako je jednostavan sadrži sve bitne karakteristike katabatičkog strujanja, te omogućuje dobivanje analitičkog rješenja i tumačenja utjecaja različitih faktora na katabatičko strujanje (npr. Stiperski i sur., 2007). To je prvi model strujanja nad kosinom (razvijen je 40-tih godina 20.st.) koji je uspješno opisao razvoj vjetra i temperature nad kosinom, uzimajući u obzir nagib terena i komponentu sile uzgona niz struju fluida. Njime je, dakle, prikazano jednostavno katabatičko i anabatičko strujanje formirano nad ohlađenom, odnosno zagrijanom, uniformnom kosinom. Takvo strujanje odvija se uz pretpostavku ravnoteže između uzgonske sile i turbulentnog miješanja, koje nastaje kao reakcija na uzgon.

Za opis strujanja koristimo sustav  $(x', z')$  kojeg dobijemo zakretanjem horizontalnog koordinatnog sustava  $(x, z)$  niz padinu za kut  $\alpha$  (kut nagiba između padine i horizontale). Na Slici 2 je prikazan novi  $(x', z')$  sustav, početna vertikalna os  $z$ , smjer djelovanja sile teže,  $g$ , ukupna potencijalna temperatura,  $\Theta$ , i nagib padine,  $\alpha$ , koji je ovdje negativan za katabatička, a pozitivan za anabatička strujanja.



Slika 2: Zarotirani koordinatni sustav analitičkog modela katabatičkog strujanja (Kavčič, 2010.; Slika 2.1a)

U sustavu  $(x, z)$ , u uvjetima dovoljno stabilne i mirne atmosfere (bez osnovnog vjetra), vrijedi hidrostatička i Boussinesqova aproksimacija. Kut  $\alpha$  je mali, pa u novom  $(x', z')$  sustavu vrijedi kvazihidrostatička aproksimacija (Mahrt, 1982.), obzirom da se u oba sustava simultano ne može uvažiti hidrostatička aproksimacija. Uz to, zanemarujemo ovisnost gibanja, mase i topline o udaljenosti niz ili paralelni kosini, tj. njihovi gradijenti su okomiti na kosinu. Jednadžbe gibanja, kontinuiteta i termodinamike u novom sustavu glase:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g \frac{\theta}{\theta_0} \sin(\alpha) + \frac{\partial}{\partial z} \left( K Pr \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\Gamma \sin(\alpha) u + \frac{\partial}{\partial z} \left( K \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \quad (3)$$

Rubni uvjeti su:

$$\theta(z = 0) = C, \quad u(z = 0) = 0, \quad w(z = 0) = 0 \quad (4)$$

$$\theta(z \rightarrow \infty) = 0, \quad u(z \rightarrow \infty) = 0 \quad (5)$$

U ovom modelu, (1)-(3), i rubnim uvjetima, (4) i (5), vrijede standardne oznake:  $u$  je komponenta vjetra niz kosinu,  $w$  je komponenta vjetra okomita na kosinu (u  $z'$  smjeru),  $\theta$  je perturbacija potencijalne temperature ( $\Theta$  je ukupna potencijalna temperatura),  $\theta_0$  je referentna potencijalna temperatura,  $\Gamma$  je konstantni vertikalni gradijent potencijalne temperature u početnom ( $x, z$ ) sustavu ( $\Gamma = d\theta^*/dz \approx d\theta^*/dz' > 0$  u donjoj troposferi za male  $\alpha$ , gdje je  $\theta^*$  potencijalna temperatura okoliša, tj.  $\theta^* = \theta_0 + \Gamma z$ ). Obzirom da vrijednosti nagiba kosine,  $\alpha$ , za uspješno opisivanje katabatičkog strujanja u ovom modelu ne prelaze  $10^\circ$ , opravданa je pretpostavka korištenja konstantnog gradijenta  $\Gamma$  u početnoj vertikali u (3). Nadalje,  $Pr$  je Prandtlov turbulentni broj,  $Pr = K_m/K_h$ , gdje je  $K_h = K$  ( $m^2 s^{-1}$ ) vrtložna konduktivnost topline (potencijalna temperatura pomnožena s gustoćom i  $C_p$ ), odnosno koeficijent turbulentne difuzivnosti za toplinu, a  $K_m$  ( $m^2 s^{-1}$ ) vrtložna (turbulentna) difuzivnost,  $g$  je ubrzanje sile teže (npr. Kavčič, 2010.). Drugi član na desnoj strani u (1) i (3) je član turbulentnog trenja. On je u ravnoteži s uzgonskim članom (prvi član na desnoj strani u (1)), te članom koji prikazuje adijabatsko zagrijavanje (za silazno strujanje) odnosno hlađenje (za uzlazno strujanje; prvi član na desnoj strani u (3)).

Rubni uvjeti pri tlu su da nema vjetra (eng. no slip), te da je perturbacija potencijalne temperature konstantna i jednaka  $C$ , gdje je  $C$  negativan za katabatička, a pozitivan za anabatička strujanja. Gornji rubni uvjet pokazuje da svi poremećaji trnu s velikom visinom. Iz rubnog uvjeta  $w(z = 0) = 0$  i jednadžbe kontinuiteta (2) slijedi da je uvijek  $w = 0$ . Važno je da model nema vrlo duboko

strujanje jer tada pretpostavka korištenja konstantnog gradijenta  $\Gamma$  u početnoj vertikali ne bi bila opravdana.

Da bi se dobio jednostavan zatvoreni sustav jednadžbi za horizontalno homogeni i stacionarni AGS potrebno je pretpostaviti da se turbulentni vrtlozi ponašaju kvalitativno slično molekularnoj difuziji, no s koeficijentima razmjene većim nekoliko redova veličina od onih pri molekularnoj difuziji, pa je perturbacija proporcionalna pripadnom gradijentu srednjeg stanja. Turbulentne tokove impulsa i topline parametriziramo na sljedeći način:

$$\overline{u'w'} = -K_m \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \quad (6)$$

$$\overline{\theta'w'} = -K_h \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \quad (7)$$

Ova shema zatvaranja jednadžbi (6) i (7) AGS-a naziva se K-teorija (npr. Holton, 2004.).

Prepostavimo li stacionarnost klasičnog modela, tada lijeva strana u (1) i (3) postaje nula, a ravnoteža je određena balansom između negativnog uzgona i turbulentnog trenja (desna strana u (1)), te vertikalnog temperaturnog gradijenta, odnosno adijabatičkog zagrijavanja/hlađenja i turbulentne razmjene temperature (desna strana u (3)). Rješenja stacionarnog Prandtlovog modela,  $(u, \theta) = (u_0, \theta_0)$ , uz dane pretpostavke i rubne uvjete su matematički slična onima za Ekmanov sloj i glase:

$$u_0(z) = -C\mu \exp\left(-\frac{z}{h_p}\right) \sin\left(\frac{z}{h_p}\right) \quad (8)$$

$$\theta_0(z) = C \exp\left(-\frac{z}{h_p}\right) \cos\left(\frac{z}{h_p}\right) \quad (9)$$

pri čemu vrijedi:

$$h_p = \left( \frac{4K^2 Pr}{N^2 \sin^2(\alpha)} \right)^{1/4}, \quad \sigma = \left( \frac{N \sin(\alpha)}{K Pr^{1/2}} \right)^{1/2}, \quad \mu = \left( \frac{g}{\theta_0 \Gamma Pr} \right)^{1/2} \quad (10)$$

gdje je  $h_p = \frac{\sqrt{2}}{\sigma}$  karakteristična visina Prandtlovog sloja,  $\sigma$  je pripadni karakteristični "valni broj", a  $N^2 = \frac{\Gamma g}{\theta_0}$  je kvadrat uzgonske frekvencije. Iz ovih stacionarnih

rješenja za brzinu vjetra i temperaturu može se izračunati visina,  $h_j = h_p \pi / 4$ , i maksimalna brzina NMS-a. Tu, u samom "nosu" NMS-a nema smicanja. Iz (10) zaključujemo da je dubina Prandtlovog sloja,  $h_p$ , veća što je jača turbulentna difuzija (veći  $K$ ) i slabija stratifikacija atmosfere (manji  $N^2$ ). Također uočavamo da su nagnutiji granični slojevi relativno plići. Konačne perturbacije potencijalne temperature i vjetra, (8) i (9), su izravno proporcionalne površinskom deficitu potencijalne temperature  $C$ , što znači da jače ohlađivanje tla uzrokuje jaču prizemnu plitku inverziju i pripadno silazno strujanje. Maksimum brzine tog strujanja će biti veći što je slabija stratifikacija atmosfere i on neće ovisiti o nagibu terena, kao što će o njemu ovisiti visina maksimuma,  $h_j \sim \sin^{-1/2}(\alpha)$ .

Za anabatički vjetar postupak i rješenja su analogna ovima za katabatički vjetar, no u tom slučaju je  $C > 0$  i  $\alpha > 0$ , a dobiveni profili  $u_0(z)$  i  $\theta_0(z)$  nisu simetrični, te su dublji i izglađeniji nego u katabatičkom strujanju ( $K$  je puno veći). Uzrok tome je što u anabatičkom strujanju termodinamika nije simetrična, odnosno reverzibilna, i sila teža koči uzlazno strujanje obronka unatoč pozitivnom uzgonu.

## 1.4 Modificirani Prandtlov model

Jedan od glavnih nedostataka većine analitičkih modela katabatičkog strujanja je prepostavljena linearnost i zadane konstante vrtložne difuzivnosti i konduktivnosti topline kako bi se olakšalo matematičko računanje. Ograničenje vezano za linearnost možemo poboljšati uvodeći blagu nelinearnost u model pomoću malog parametra  $\varepsilon$ , dok umjesto konstantnog koeficijenta vrtložne difuzivnosti uzimamo sporo varirajući  $K = K(z)$ . Analitička rješenja s varijabilnim  $K(z)$  mogu se izvesti pomoću WKB metode (npr. Grisogono i Oerlemans, 2001a,b, 2002.).

### 1.4.1 Blago nelinearni Prandtlov model s konstantnom turbulentnom difuzivnosti

Vrlo jak vertikalni gradijent potencijalne temperature uz samu površinu padine često je zanemaren u linearnim analitičkim, klimatskim, pa čak i u numeričkim prognostičkim modelima (npr. Svensson i Holtslag, 2009.; Nikulin i sur., 2011.; Chow i sur., 2013.). Unatoč tome što izazvani temperaturni gradijent ispod katabatičkog NMS-a može biti 20, pa čak i 50 puta veći od temperaturnog gradijenta okoline (npr. Grisogono i Oerlemans, 2001a; Oerlemans, 2001.; Grisogono i Axelsen, 2012.), analitički katabatički vjetar uz podlogu ne osjeća brzu prilagodbu temperaturnog profila nakon početnog diskontinuiteta potencijalne temperature, ako se u obzir uzima i vrijeme razvoja (npr. Grisogono, 2003.). Dodavanjem člana  $\varepsilon \frac{\partial \theta}{\partial z}$  članu  $\Gamma$  u jednadžbi termodynamike uvodi se u model blaga nelinearnost i na taj način uvažava jaki površinski gradijent potencijalne temperature u profilima temperature i vjetra (npr. Grisogono i sur., 2015.).

Za uvođenje blage nelinearnosti korištena je regularna perturbativna metoda, koja se koristi za pronalaženje približnih rješenja u nelinearnim sustavima (Bender i Orszag, 1978.). Jednadžbe u modificiranom, blago nelinearnom Prandtlovom modelu u stacionarnom stanju glase:

$$0 = g \frac{\theta}{\theta_0} \sin(\alpha) + K Pr \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad (11)$$

$$0 = - \left( \Gamma + \varepsilon \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) \sin(\alpha) u + K \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \quad (12)$$

Spomenute veličine su iste kao u klasičnom Prandtlovom modelu. Jedina razlika

jest spomenuti novi član u jednadžbi termodinamike,  $\varepsilon \frac{\partial \theta}{\partial z}$ , koji regulira nelinearnost pomoću malog parametra za kojeg vrijedi  $0 \leq \varepsilon \ll 1$ . Član  $\frac{\partial \theta}{\partial z}$  povećava advekciju potencijalne temperature duž padine koju neutralizira parametrizacija turbulentnog miješanja. Sličan slučaj je kod zmorca (Gutman, 1972.) gdje se brzina vjetra razvija linearno, a potencijalna temperatura nelinearno zbog interakcije s brzinom vjetra. Uz to vrijedi  $\Gamma \ll \frac{\partial \theta}{\partial z}$  u blizini ( $z \sim h_j$ ) i ispod ( $z \leq h_j$ ) NMS-a.

Ukupna potencijalna temperatura i  $u$  komponenta brzine vjetra razvijene su u regularnoj perturbativnoj analizi kao:

$$u_{tot} = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots \quad (13)$$

$$\theta_{tot} = \theta_0 + \varepsilon \theta_1 + \varepsilon^2 \theta_2 + \dots \quad (14)$$

gdje su  $u_0$  i  $\theta_0$  varijable nultnog reda, tj. rješenja stacionarnog klasičnog Prandtlovog modela, a  $\varepsilon u_1$  i  $\varepsilon \theta_1$  su varijable prvog reda korekcije; u ovom slučaju predstavljaju blagu nelinearnost uključenu u model. Ostali članovi predstavljaju korekcije višeg reda, no njih zbog jednostavnosti nećemo uzimati u obzir (npr. Grisogono i sur., 2015.). Rubni uvjeti uobičajeni za Prandtlov model su:

$$\theta_{tot}(z = 0) = C, \quad u_{tot}(z = 0) = 0, \quad (15)$$

$$\theta_{tot}(z \rightarrow \infty) = 0, \quad u_{tot}(z \rightarrow \infty) = 0 \quad (16)$$

Obzirom da za  $u_0$  i  $\theta_0$  vrijede rubni uvjeti (4) i (5) za stacionaran slučaj, mora biti zadovoljeno sljedeće:

$$\theta_1(z = 0) = 0, \quad u_1(z = 0) = 0, \quad (17)$$

$$\theta_1(z \rightarrow \infty) = 0, \quad u_1(z \rightarrow \infty) = 0. \quad (18)$$

U jednadžbe (11) i (12), na mesta  $u$  i  $\theta$ , uvrštavaju se  $u_{tot}$  i  $\theta_{tot}$ , (13) i (14). Pošto je sustav već riješen za  $\varepsilon^0$  (izrazi (8) i (9)), a članovi višeg reda se zanemaruju, uzimaju se samo članovi uz  $\varepsilon^1$ , te dobiva:

$$0 = g \frac{\theta_1}{\theta_0} \sin(\alpha) + KPr \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \quad (19)$$

$$0 = - \left( \Gamma u_1 + \frac{\partial \theta_0}{\partial z} u_0 \right) \sin(\alpha) + K \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial z^2} \quad (20)$$

Traže se rješenja sustava,  $u_1$  i  $\theta_1$ . Izraz za  $\theta_1$ , dobiven iz (19), uvrsti se u (20), a izraz za  $u_1$ , dobiven iz (20), uvrsti se u (19). Dobivene dvije diferencijalne jednadžbe četvrtog reda za  $u_1$  i  $\theta_1$  predstavljaju tjerani prigušeni oscilator:

$$\frac{\partial^4 u_1}{\partial z^4} + u_1 \frac{g \Gamma \sin^2(\alpha)}{\theta_0 P r K^2} = - \frac{g \sin^2(\alpha)}{\theta_0 P r K^2} u_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial z} \quad (21)$$

$$\frac{\partial^4 \theta_1}{\partial z^4} + \theta_1 \frac{g \Gamma \sin^2(\alpha)}{\theta_0 P r K^2} = \frac{g \sin(\alpha)}{K} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( u_0 \frac{\partial \theta_0}{\partial z} \right) \quad (22)$$

Obzirom da  $u_1$  i  $\theta_1$  ovise samo o visini  $z$ , parcijalne derivacije se zamjenjuju običnim derivacijama, a jednadžbe potom rješavaju metodom neodređenih koeficijenata. Detaljan postupak nalazi se u Jurlina (2013.). Konačna rješenja su:

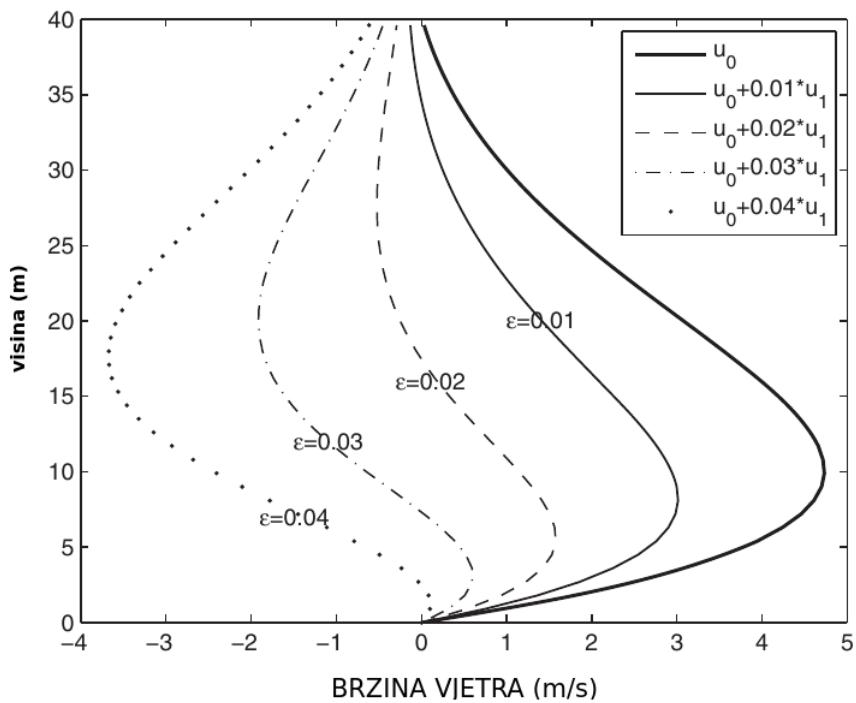
$$u_1(z) = u_A \exp \left( -\frac{z}{h_p} \right) \left[ -\frac{1}{3} \sin \left( \frac{z}{h_p} \right) + \frac{2}{15} \cos \left( \frac{z}{h_p} \right) \right] \\ + u_A \exp \left( -\frac{2z}{h_p} \right) \left[ -\frac{1}{30} \cos \left( \frac{2z}{h_p} \right) + \frac{1}{30} \sin \left( \frac{2z}{h_p} \right) - \frac{1}{10} \right] \quad (23)$$

$$\theta_1(z) = \theta_A \exp \left( -\frac{z}{h_p} \right) \left[ -\frac{1}{15} \sin \left( \frac{z}{h_p} \right) - \frac{1}{6} \cos \left( \frac{z}{h_p} \right) \right] \\ + \theta_A \exp \left( -\frac{2z}{h_p} \right) \left[ \frac{1}{15} \sin \left( \frac{2z}{h_p} \right) + \frac{1}{15} \cos \left( \frac{2z}{h_p} \right) + \frac{1}{10} \right] \quad (24)$$

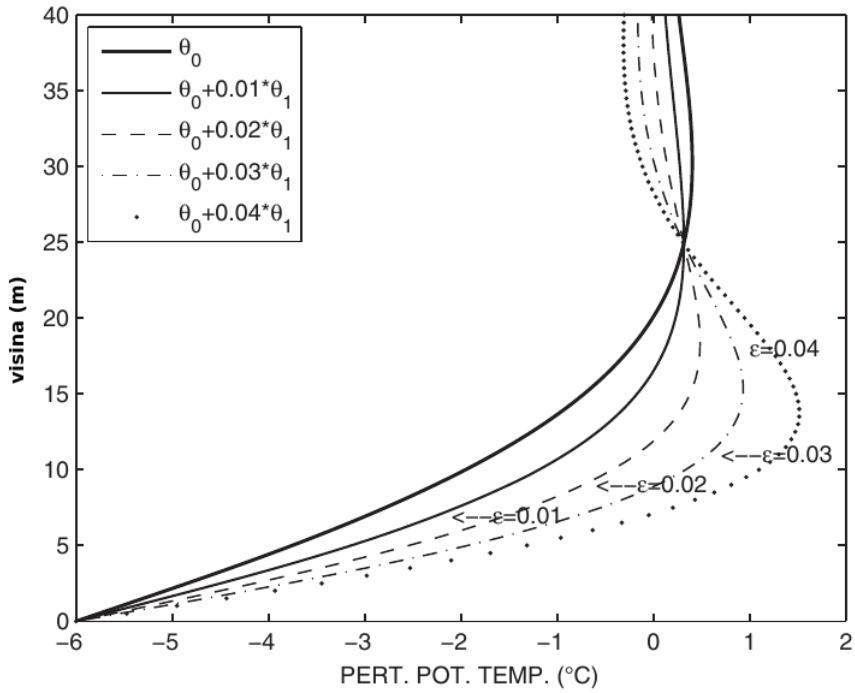
gdje su amplitude rješenja  $u_A = \frac{C^2 \mu}{h_p \Gamma}$  i  $\theta_A = \frac{h_p C^2 \mu \sin(\alpha)}{K}$ . Članovi uz  $\exp(-\frac{z}{h_p})$  potječu od homogenog, a oni uz  $\exp(-\frac{2z}{h_p})$  od partikularnog dijela rješenja.

Slike 3 i 4 prikazuju tipične katabatičke profile brzine vjetra i perturbirane potencijalne temperature, za linearna ( $u_0$  i  $\theta_0$ ) i modificirana rješenja ( $u_{tot}$  i  $\theta_{tot}$ ). Cilj ovih prikaza bio je odrediti prihvatljivu vrijednost parametra  $\varepsilon$ . Obje slike ukazuju da je gornji limit vrijednosti tog parametra, u kontekstu jednostavnog katabatičkog strujanja,  $\max(\varepsilon) = 0.01$ . Za parametre veće od toga blaga nelinearnost postaje jaka, što nije u skladu s početnom pretpostavkom. Jakost inverzije

se ne bi smjela gotovo udvostručiti uvođenjem blage nelinearnosti u odnosu na linearno stanje (Slika 4), a statički nestabilan sloj iznad glavnine strujanja (u ovom slučaju  $z \geq 25$  m) ne bi trebao biti pretjerano nestabilan (Grisogono i sur., 2015.). Isto tako modificirana brzina se ne bi smjela jako razlikovati od originalne, a na Slici 3 vidimo da se maksimalna brzina već za  $\varepsilon = 0.02$  smanji tri puta, a za veće iznose  $\varepsilon$  čak promijeni smjer. Stoga realistično katabatičko strujanje postoji za  $0 \leq \varepsilon < 0.01$ , pa ostale profile modificiranog rješenja treba odbaciti (npr. Grisogono i sur., 2015.).



Slika 3: Profili brzina katabatičkog vjetra za različite parametre  $\varepsilon$ . Ostali ulazni parametri su  $K = \text{konst} = 0.06 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ ,  $Pr = 2$ ,  $\alpha = -5^\circ$ ,  $\theta_0 = 273.14 \text{ K}$ ,  $\Gamma = 3 \text{ K km}^{-1}$ ,  $C = -6 \text{ }^\circ\text{C}$ . (Grisogono i sur., 2015.; Slika 1.)



Slika 4: Profili perturbiranih potencijalnih temperatura katabatičkog vjetra za različite parametre  $\varepsilon$ . Ostali ulazni parametri su kao na Slici 3. (Grisogono i sur., 2015.; Slika 2.)

Usporedimo li modificiranu brzinu i potencijalnu temperaturu za  $\varepsilon = 0.01$  s originalnim (Slike 3 i 4), vidimo da su kod brzine veća odstupanja modificiranog,  $u_{tot}(z)$ , od originalnog rješenja,  $u_0(z)$ , nego što je to slučaj kod potencijalne temperature,  $\theta_{tot}(z)$  od  $\theta_0(z)$ . Kod modificirane brzine vjetra je prizemni gradijent manji od onog kod originalne brzine, maksimalna brzina NMS-a je manja za oko 2 m/s, a manja je i njena visina ( $h_{j,0} = 10.05$  m, a  $h_{j,tot} = 8.22$  m), koja se numerički dobije iz uvjeta da nema smicanja vjetra ( $\partial u / \partial z = 0$ ). Za razliku od brzine, prizemni gradijent modificirane potencijalne temperature je veći od onog kod originalne. Krivulje rješenja modificiranih brzina i potencijalnih temperatura za  $\varepsilon < 0.01$  nalaze se između originalne krivulje i one modificirane za  $\varepsilon = 0.01$ .

Kako u jednadžbi termodinamike u modificiranom Prandtlovom modelu (12) uvođenje blage nelinearnost ne bi dovelo do promjene prirode odgovarajućeg klasičnog rješenja mijenjajući predznak zgrade, mora biti zadovoljena relacija:

$$\Gamma + \varepsilon \frac{\partial \theta_0}{\partial z} \geq 0 \quad (25)$$

Prosječna vrijednost gradijenta totalne potencijalne temperature ne smije promjeniti predznak, čime je ograničena vrijednost maksimalno dozvoljenog parametra

$\varepsilon$ , te mora vrijediti:

$$\Gamma > \max(\varepsilon) \left| \left\langle \frac{\partial \theta_0}{\partial z} \right\rangle \right|, \quad (26)$$

gdje je  $\left\langle \frac{\partial \theta_0}{\partial z} \right\rangle$  prosječna vrijednost, a absolutna vrijednost od toga je uzeta kako bi ovo ograničenje bilo podjednako ispunjeno i za katabatičko i za anabatičko strujanje (npr. Grisogono i sur., 2015.). Van den Broeke (1997a, 1997b) je u svom radu kao izvor prisile katabatičkog strujanja uzeo glavninu prosječnog površinskog deficitne potencijalne temperature,  $C/2$ , te dobio da je  $\left| \left\langle \frac{\partial \theta_0}{\partial z} \right\rangle \right| = \frac{|C|}{2h_p}$ . Stoga vrijedi da je:

$$\max(\varepsilon) < \frac{2\Gamma h_p}{|C|}. \quad (27)$$

Za ulazne parametre  $\Gamma = 3 \text{ K km}^{-1}$ ,  $C = -6 \text{ }^{\circ}\text{C}$ ,  $h_p = 20 \text{ m}$ , dobivamo  $\max(\varepsilon) < 0.02$ . Uzmemli u obzir prethodno komentirane Slike 3 i 4 možemo postrožiti kriterij, te smanjiti raspon od  $\varepsilon$  na  $0 \leq \varepsilon < 0.01$ . Kao prosjek tog "katabatičkog raspona" najčešće uzimamo  $\varepsilon = 0.005$  (npr. Grisogono i sur., 2015.).

#### 1.4.2 Blago nelinearni Prandtlov model s varijabilnom turbulentnom difuzivnosti

Nastojeći što bolje opisati stvarno katabatičko strujanje, u modificirani Prandtlov model, umjesto konstantnog, uvodi se varijabilni koeficijent turbulentne difuzivnosti,  $K = K(z)$ . Analitička rješenja ( $u_1$  i  $\theta_1$ ) s varijabilnim  $K(z)$  izvode se pomoću WKB metode nultog reda (Grisogono i Oerlemans, 2001a,b, 2002.), koja daje asymptotička analitička rješenja singularno perturbiranog problema (Berger i Grisogono, 1998.). Posljedica ove WKB aproksimacije jest da konačna rješenja više nisu strogo periodičke funkcije jer argument eksponencijalnih i trigonometrijskih funkcija postaje integralna funkcija  $I(z)$ . Iako može biti definirana na razne načine, da bi metoda bila valjana, nužno je da funkcija  $K(z)$  bude sporo varirajuća. Jedna od definicija je (npr. Grisogono i Oerlemans, 2001b; Jeričević i Večenaj, 2009.; Jeričević i suradnici, 2010.):

$$K(z) = K_0 \frac{z}{h} \exp\left(-\frac{z^2}{2h^2}\right) + K_{min}, \quad (28)$$

gdje je  $h$  visina maksimalne vrijednosti profila  $K(z)$ , te mora biti veća od karakteristične duljine (visine) na kojoj značajno variraju tražena rješenja. Maksimum na visini  $z = h$  je  $K(z) = K_0 \exp(-1/2)$ . Da bi se izbjegla eventualna dijeljenja s nulom, vrijednosti  $K(z)$  je dodana mala konstanta turbulentne difuzivnosti,  $K_{min}$ , najčešće deset puta veća od molekularne difuzivnosti za zrak (npr. Sun i sur., 2013.).

Kreće se od istog sustava jednadžbi kao i u klasičnom Prandtlovom modelu (izrazi (1) i (3)), s tim da je  $K = K(z)$  umjesto  $K = \text{konst}$ . U dobivenim diferencijalnim jednadžbama četvrtog reda za  $u(z)$  i  $\theta(z)$  (npr. Parmhed i sur., 2004.) zanemare se članovi uz  $\frac{d^2\theta}{dz^2}$  i  $\frac{d\theta}{dz}$  jer se radi o WKB metodi nultog reda, kao i članovi uz  $\frac{d^3\theta}{dz^3}$  jer su derivacije višeg reda zanemarive u ovoj aproksimaciji. Krajnje jednadžbe razlikuju se od onih u klasičnom Prandtlovom modelu samo u sporo varirajućoj funkciji  $K(z)$ :

$$\frac{d^4u}{dz^4} + N^2 \frac{\sin^2(\alpha)}{PrK(z)^2} u = 0 \quad (29)$$

$$\frac{d^4\theta}{dz^4} + N^2 \frac{\sin^2(\alpha)}{PrK(z)^2} \theta = 0. \quad (30)$$

Korištenjem uobičajenih rubnih uvjeta ovog modela (izrazi (4) i (5)) dobivena su rješenja diferencijalnih jednadžbi za  $u_0$  i  $\theta_0$  WKB metodom:

$$u_{0,WKB}(z) = -C\mu \exp [-I(z)] \sin [I(z)], \quad (31)$$

$$\theta_{0,WKB}(z) = C \exp [-I(z)] \cos [I(z)], \quad (32)$$

pri čemu je

$$I(z) = \left(\frac{\sigma_0}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^z K(z)^{-\frac{1}{2}} dz, \quad \sigma_0^2 = \frac{g\Gamma \sin(\alpha)}{\theta_0 Pr}. \quad (33)$$

Struktura rješenja (31) i (32) jednaka je onima u klasičnom Prandtlovom modelu (izrazi (8) i (9); npr. Grisogono, 1995.; Grisogono i Oerlemans, 2001a,b, 2002.), amplituda ostaje konstantna, dok faza prelazi u integralni oblik.

I u ovom slučaju može se uvesti u model blaga nelinearnost, na isti način kao i za slučaj  $K = \text{konst}$ , dodajući članu  $\Gamma$  blago nelinearan član  $\varepsilon \frac{\partial \theta}{\partial z}$ . Polazne jednadžbe su analogne jednadžbama (11) i (12), s tim da je  $K = K(z)$ . Ukupna rješenja WKB metode za  $u$  komponentu brzine vjetra i potencijalnu temperaturu razviju se u red, zadržavajući se na članovima prvog reda razvoja:

$$u_{tot,WKB}(z) = u_{0,WKB}(z) + \varepsilon u_{1,WKB}(z) \quad (34)$$

$$\theta_{tot,WKB}(z) = \theta_{0,WKB}(z) + \varepsilon \theta_{1,WKB}(z). \quad (35)$$

Izrazi za  $u_{tot,WKB}$  i  $\theta_{tot,WKB}$  uvrste se na mesta  $u$  i  $\theta$  u jednadžbama (11) i (12). Pošto je sustav uz  $\varepsilon^0$  riješen, (31) i (32), uzimaju se samo članovi uz  $\varepsilon^1$ , pa dobiveni sustav glasi:

$$0 = g \frac{\theta_{1,WKB}}{\theta_0} \sin(\alpha) + K Pr \frac{d^2 u_{1,WKB}}{dz^2} \quad (36)$$

$$0 = - \left( \Gamma u_{1,WKB} + \frac{d\theta_{0,WKB}}{dz} u_{0,WKB} \right) \sin(\alpha) + K \frac{d^2 \theta_{1,WKB}}{dz^2} \quad (37)$$

Nepoznanice ovog sustava su  $u_{1,WKB}$  i  $\theta_{1,WKB}$ . Iz (36) dobije se izraz za  $\theta_{1,WKB}$  i uvrsti u (37), a iz (37) se dobije izraz za  $u_{1,WKB}$  i uvrsti u (36), te tako dobiju dvije diferencijalne jednadžbe četvrtog reda za  $u_{1,WKB}$  i  $\theta_{1,WKB}$ . Zanemarivanjem članova uz  $\frac{d^2 \theta}{dz^2}$ ,  $\frac{d\theta}{dz}$  i  $\frac{d^3 \theta}{dz^3}$ , kao u linearном slučaju, dobiju se dvije nehomogene diferencijalne jednadžbe četvrtog reda koje predstavljaju tjerani pri-

gušeni oscilator:

$$\frac{d^4 u_{1,WKB}}{dz^4} + N^2 \frac{\sin^2(\alpha)}{PrK(z)^2} u_{1,WKB} = -\frac{g \sin^2(\alpha)}{\theta_0 K(z)^2 Pr} u_{0,WKB} \frac{d\theta_{0,WKB}}{dz}, \quad (38)$$

$$\frac{d^4 \theta_{1,WKB}}{dz^4} + N^2 \frac{\sin^2(\alpha)}{PrK(z)^2} \theta_{1,WKB} = \frac{\sin(\alpha)}{K(z)} \frac{d^2}{dz^2} \left( u_{0,WKB} \frac{d\theta_{0,WKB}}{dz} \right). \quad (39)$$

Kvalitativno gledajući, za katabatička strujanja ( $\alpha < 0$ ) desna strana prisile u gornjim jednadžbama ukazuje na uglavnom pozitivan doprinos za  $\theta_{1,WKB}$  i uglavnom negativan za  $u_{1,WKB}$ , dok je za anabatička strujanja ( $\alpha > 0$ ) obrnuto. Iz rubnih uvjeta uobičajenih za Prandtlov model, (15) i (16), te onih za stacionarni slučaj, (4) i (5), slijedi da je:

$$\theta_{1,WKB}(z=0) = 0, \quad u_{1,WKB}(z=0) = 0, \quad (40)$$

$$\theta_{1,WKB}(z \rightarrow \infty) = 0, \quad u_{1,WKB}(z \rightarrow \infty) = 0 \quad (41)$$

Korištenjem tih rubnih uvjeta, te rješenja WKB metode za linearni slučaj, nakon duljeg računanja dobiju se rješanja za  $u_{1,WKB}$  i  $\theta_{1,WKB}$  (npr. Jurlina, 2013.; Grisogono i sur., 2015.):

$$u_{1,WKB}(z) = u_{A,WKB} \exp[-I(z)] \left\{ -\frac{1}{3} \sin[I(z)] + \frac{2}{15} \cos[I(z)] \right\} + u_{A,WKB} \exp[-2I(z)] \left\{ -\frac{1}{30} \cos[2I(z)] + \frac{1}{30} \sin[2I(z)] - \frac{1}{10} \right\}, \quad (42)$$

$$\theta_{1,WKB}(z) = \theta_{A,WKB} \exp[-I(z)] \left\{ -\frac{1}{15} \sin[I(z)] - \frac{1}{6} \cos[I(z)] \right\} + \theta_{A,WKB} \exp[-2I(z)] \left\{ \frac{1}{15} \sin[2I(z)] + \frac{1}{15} \cos[2I(z)] + \frac{1}{10} \right\}, \quad (43)$$

gdje amplitude rješenja više nisu konstante kao prije, već iznose:

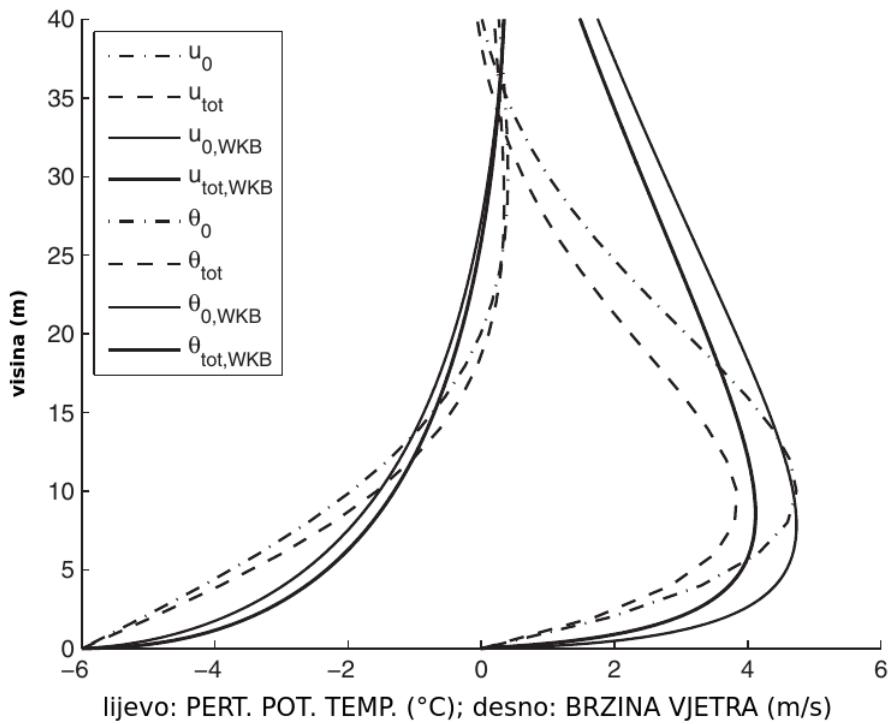
$$u_{A,WKB} = \left( \frac{\sigma_0}{2} \right)^{\frac{1}{2}} C^2 \frac{\mu}{\Gamma} K(z)^{-\frac{1}{2}}, \quad (44)$$

$$\theta_{A,WKB} = \left( \frac{2}{\sigma_0} \right)^{\frac{1}{2}} C^2 \mu \sin(\alpha) K(z)^{-\frac{1}{2}}. \quad (45)$$

Ukupna rješenja za blago nelinearni Prandtlov model sa sporo varirajućom turbulentnom difuzivnosti računaju se prema (34) i (35).

### 1.4.3 Katabatičko i anabatičko strujanje

Sva spomenuta rješenja grafički su objedinjena na Slici 5. Prikazani su profili perturbiranih potencijalnih temperatura i brzina katabatičkog vjetra za klasični linearni,  $(u, \theta)_0$ , i blago nelinearni slučaj,  $(u, \theta)_{tot}$ , uz  $K = \text{konst}$ , te za linearni WKB,  $(u, \theta)_{0,WKB}$ , i blago nelinearni WKB slučaj,  $(u, \theta)_{tot,WKB}$ , uz  $K = K(z)$  kao u relaciji (28). Profil funkcije  $K(z)$  ima maksimum na visini od  $h = 30$  m i iznosi  $0.3 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ .

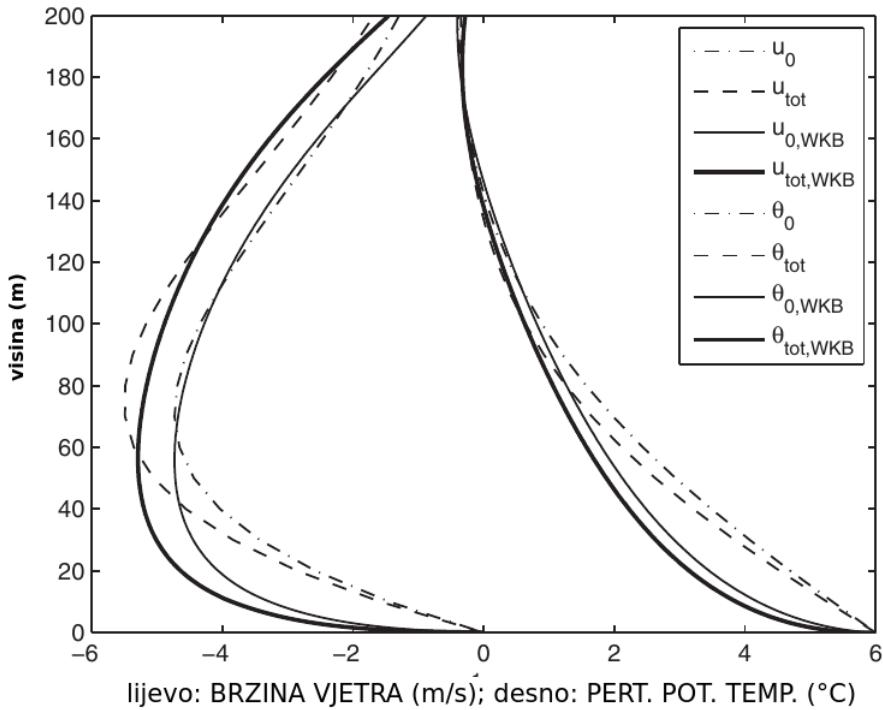


Slika 5: Profili perturbiranih potencijalnih temperatura i brzina katabatičkog vjetra za klasični linearni,  $(u, \theta)_0$ , i blago nelinearni slučaj,  $(u, \theta)_{tot}$ , uz  $K = \text{konst} = 0.06 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ , crtkane krivulje, te za linearni WKB,  $(u, \theta)_{0,WKB}$ , i blago nelinearni WKB slučaj,  $(u, \theta)_{tot,WKB}$ , uz  $K = K(z)$  kao u (28), pune krivulje. Parametar  $\varepsilon = 0.005$ , a ostali ulazni parametri su kao na Slici 3 (Grisogono i sur., 2015.; Slika 3.).

Na Slici 5 je vidljivo da je najmanji prizemni gradijent potencijalne temperature onaj za klasični linearni slučaj, a najveći je za blago nelinearni WKB slučaj, dok je kod brzine najmanji prizemni gradijent za blago nelinearni slučaj, a najveći

za linearni WKB slučaj. Oba WKB rješenja za potencijalnu temperaturu,  $\theta_{0,WKB}$  i  $\theta_{tot,WKB}$ , imaju veći prizemni gradijent od rješenja za slučajeve s  $K = \text{konst}$ ,  $\theta_0$  i  $\theta_{tot}$ , što je i očekivano. Isto je i kod brzine, WKB rješenja,  $u_{0,WKB}$  i  $u_{tot,WKB}$ , imaju veći prizemni gradijent od rješenja za slučajeve s  $K = \text{konst}$ ,  $u_0$  i  $u_{tot}$ . Kod WKB rješenja maksimum NMS-a je na manjoj visini nego kod rješenja za  $K = \text{konst}$ , te dostiže gotovo 5 m/s ( $u_{0,WKB}$ ), odnosno 4 m/s ( $u_{tot,WKB}$ ), što znači da je NMS umjereno jaka. Visina maksimuma je blizu površine ( $\approx 6$  m) i nalazi se unutar najveće prizemne temperaturne inverzije od  $\approx 5$  K/(10 m), što znači da blago nelinearno WKB rješenje opisuje katabatički vjetar unutar jako stabilnog stratificiranog sloja.

Na Slici 6 prikazani su profili perturbiranih potencijalnih temperatura i brzina anabatičkog vjetra za klasični linearni,  $(u, \theta)_0$ , i blago nelinearni slučaj,  $(u, \theta)_{tot}$ , uz  $K = \text{konst}$ , te za linearni WKB,  $(u, \theta)_{0,WKB}$ , i blago nelinearni WKB slučaj,  $(u, \theta)_{tot,WKB}$ , uz  $K = K(z)$  kao u (28).



Slika 6: Profili perturbiranih potencijalnih temperatura i brzina anabatičkog vjetra za klasični linearni,  $(u, \theta)_0$ , i blago nelinearni slučaj,  $(u, \theta)_{tot}$ , uz  $K = \text{konst} = 3 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ , crtkane krivulje, te za linearni WKB,  $(u, \theta)_{0,WKB}$ , i blago nelinearni WKB slučaj,  $(u, \theta)_{tot,WKB}$ , uz  $K = K(z)$  kao u (28), pune krivulje. Parametar  $\varepsilon = 0.03$ ,  $\alpha = 5^\circ$ ,  $C = 6$  °C, a ostali ulazni parametri su kao na Slici 3 (Grisogono i sur., 2015.; Slika 4.).

Anabatičko strujanje se odvija u dubljem sloju nego katabatičko strujanje. Pošto je zrak uz podlogu topliji od zraka na istoj visini podalje od podloge, potencijalna temperatura u anabatičkom strujanju početno opada s visinom, a inverzija nastupa iznad  $h_p$  ( $\sim K^{1/2}$ ), što je na nekoliko puta većoj visini nego kod katabatičkog strujanja. To direktno zahtjeva da parametar  $\varepsilon$  za anabatički blago nelinearni model mora biti nekoliko puta veći od onog za katabatičko strujanje. U ovom slučaju je  $\alpha = 5^\circ$  i  $C=6$  °C, pa i vrijednost  $K$  mora biti veća, a time i visina  $h_p$  (npr. Grisogono i sur., 2015.). Profil funkcije  $K(z)$  ima maksimum na visini od  $h = 75$  m i iznosi  $6 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$ .

Na Slici 6 također se može uočiti da potencijalna temperatura u anabatičkom strujanju puno brže opada u linearnom i blago nelinearnom WKB slučaju, nego u slučaju za  $K = \text{konst}$ , te brže opada u blago nelinearnim slučajevima nego u linearnim, za  $K = \text{konst}$  i  $K = K(z)$ . Kod brzine u anabatičkom strujanju linearna rješenja daju oko 15 do čak 20 % slabiju NMS od blago nelinearnih rješenja, za  $K = \text{konst}$  i  $K = K(z)$ . Dakle, blago nelinearni WKB slučaj daje jaču NMS i ona se nalazi unutar statički nestabilnijeg (konvektivnog) AGS-a od klasičnog linearne Prandtlovog slučaja za anabatičko strujanje. To može imati pozitivan učinak na potencijalnu procjenu energije vjetra, gdje čak promjene u brzini vjetra s 4 m/s na 5 m/s mogu udvostručiti potencijalnu snagu vjetra (npr. Grisogono i sur., 2015.).

Uspoređujući s klasičnim Prandtlovim rješenjem, blago nelinearna WKB metoda daje intenzivniju dnevnu dolinsku ventilaciju putem anabatičkog strujanja i slabiju noćnu putem katabatičkog strujanja (npr. Grisogono i sur., 2015.). To je kvalitativno u skladu s tvrdnjom da je noćni silazni ili planinski vjetar slabiji od dnevnog, termalno tjeranog, uzlaznog ili dolinskog vjetra (npr. Nadeau i sur., 2013.). To je vidljivo i na Slici 1 (Whiteman, 2000.).

## 2 Cilj i metoda rada

### Energetika Prandtlovog modela

Nakon što smo objasnili osobine korištenih modela, možemo se posvetiti cilju rada. Cilj ove radnje je istražiti energetiku katabatičkog i anabatičkog strujanja u konceptu kinetičke, potencijalne i totalne energije u linearnom i blago nelinearnom Prandtlovom modelu. Ukupnu energiju sustava čine energija okolne atmosfere, energija srednjeg strujanja nad kosinom, te energija perturbacije turbulentnog strujanja. Srednje strujanje i perturbacija turbulentnog strujanja zajedno predstavljaju odstupanje od pozadinskog stanja atmosfere, a posljedica su katabatičkog, odnosno anabatičkog strujanja. U konceptu totalne turbulentne energije u Mauritsen i sur. (2007.) kinetička energija je definirana kao veličina proporcionalna kvadratu perturbacije brzine turbulentnog strujanja, a potencijalna energija kao veličina proporcionalna kvadratu perturbacije turbulentne potencijalne temperature. Za razliku od Mauritsen i sur. (2007.) gdje se promatrao samo turbulentni dio strujanja, u ovom radu će se promatrati totalna energija kao suma kinetičke energije, koja je proporcionalna kvadratu brzine srednjeg strujanja, i potencijalne energije, koja je proporcionalna kvadratu srednje potencijalne temperature. U Smith i Skillingstad (2005.) kinetička energija je definirana kao u ovom radu, dok je potencijalna energija definirana kao linearna funkcija visine nad kosinom i perturbacije temperature.

Brzina vjetra u smjeru niz kosinu i potencijalna temperatura mogu se rastaviti na tri komponente:  $u = u^* + \bar{u} + u'$  i  $\theta = \theta^* + \bar{\theta} + \theta'$ , gdje je  $u^* = 0$ , tj. nema strujanja u okolnoj atmosferi, a  $\theta^* = \theta_0 + \Gamma z$  je potencijalna temperatura okoliša, spomenuta u potpoglavlju 1.3. Nadalje,  $\bar{u}$  i  $\bar{\theta}$  su komponente brzine i potencijalne temperature srednjeg strujanja, a  $u'$  i  $\theta'$  su pripadne perturbacije turbulentnog strujanja, u smislu Reynoldsovog usrednjavanja. Uzimajući u obzir samo srednje stanje, sustav jednadžbi u modificiranom Prandtlovom modelu glasi:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = g \frac{\bar{\theta}}{\theta_0} \sin(\alpha) + K Pr \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2}, \quad (46)$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} = - \left( \Gamma + \varepsilon \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \right) \sin(\alpha) \bar{u} + K \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial z^2}, \quad (47)$$

gdje su sve označke kao i u prethodnom poglavlju. Jednadžbu (46) pomnožimo s

$\bar{u}$ , a jednadžbu (47) s  $a\bar{\theta}$ , gdje je  $a \equiv \frac{g}{\theta_0 \Gamma}$ , dimenzijske m<sup>2</sup>s<sup>-2</sup>K<sup>-2</sup>, te dobijemo:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial t} = g \frac{\bar{\theta}}{\theta_0} \bar{u} \sin(\alpha) + K Pr \bar{u} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \quad (48)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial(a\bar{\theta}^2)}{\partial t} = -g \frac{\bar{\theta}}{\theta_0} \bar{u} \sin(\alpha) - a\varepsilon \sin(\alpha) \left[ \bar{u} \bar{\theta} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \right] + K a \bar{\theta} \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial z^2} \quad (49)$$

Zadnje članove u jednadžbama (48) i (49) raspišemo kao:

$$Pr \bar{u} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2(Pr \bar{u}^2)}{\partial z^2} - Pr \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2, \quad a \bar{\theta} \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2(a\bar{\theta}^2)}{\partial z^2} - a \left( \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \right)^2, \quad (50)$$

Zbrojimo li jednadžbe (48) i (49), prvi članovi s desne strane se dokinu (tzv. članovi konverzije), a ostale grupiramo, uzimajući u obzir raspis (50), te dobijemo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\bar{u}^2 + a\bar{\theta}^2}{2} \right) = K \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{Pr \bar{u}^2 + a\bar{\theta}^2}{2} \right) - K \left[ Pr \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2 + a \left( \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \right)^2 \right] - a\varepsilon \sin(\alpha) \left( \bar{u} \bar{\theta} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \right) \quad (51)$$

Lijeva strana jednadžbe (51) predstavlja lokalnu promjenu zbroja kinetičke energije,  $KE = (\bar{u}^2)/2$ , i potencijalne energije,  $PE = (a\bar{\theta}^2)/2$ , po jedinici mase, što predstavlja lokalnu promjenu ukupne (totalne, TE) energije srednjeg strujanja nad kosinom. Prvi član na desnoj strani je član turbulentne difuzivnosti (DIF), drugi član predstavlja disipaciju energije sustava (DIS), a treći član predstavlja interakciju strujanja nad kosinom s okolnom atmosferom (INT). Obzirom da u sebi sadrži  $\varepsilon$ , član interakcije iščezava za linearne slučajeve ( $\varepsilon = 0$ ). Dakle, za blago nelinearan model vrijedi:

$$\frac{\partial}{\partial t} (TE) = DIF - DIS - INT \quad (52)$$

Član  $DIF$  u (52) difuzira energiju (danu u obliku perturbacije temperature) od podloge,  $DIS$  je po sebi striktno pozitivno definitna veličina i guši energiju, a  $INT$  je triplet produkt varijabli strujanja što opisuje međudjelovanje profila potencijalne temperature, pripadnog gradijenta i uzrokovane struje zraka.

Iako su u Grisogono i sur. (2015.) za stacionaran slučaj strujanja dobivena linearna i nelinearna rješenja za slučajeve s konstantnim i varijabilnim koeficijentom turbulentne difuzivnosti, zbog velike osjetljivosti raspodjele energije na formulaciju

$K(z)$  i jake nestacionarnosti čak i za linearan slučaj, u ovom će se radu promatrati samo rješenja za slučaj s konstantnim koeficijentom turbulentne difuzivnosti. U jednadžbu (51), na mjestu  $\bar{u}$  i  $\bar{\theta}$  (u dalnjem tekstu, zbog jednostavnosti,  $u$  i  $\theta$ ), uvrštavat će se dobivena linearna, (8) i (9), i nelinearna rješenja, (23) i (24), koja će se umjesto dosadašnjih oznaka  $u_0, \theta_0, u_1, \theta_1$ , radi lakšeg praćenja teksta, označavati redom  $u_{lin}, \theta_{lin}, u_{nelin}, \theta_{nelin}$ . Promatrat će se osjetljivost rješenja na promjene iznosa Prandtlovog broja  $Pr$ , nagiba kosine  $\alpha$ , te parametra nelinearnosti  $\varepsilon$ . Napravit će se ansambl rješenja mijenjajući osnovne iznose veličina  $Pr$ ,  $\alpha$  i  $\varepsilon$  za  $\pm 25\%$  i na taj način dobiti 9 rješenja za linearna, te 27 rješenja za nelinearna katabatička i anabatička strujanja. Osnovne vrijednosti tih veličina, kao i ostali parametri modela su kao u Grisogono i sur. (2015.):  $Pr = 2$ ,  $\alpha = -0.1$  rad,  $\varepsilon = 0.005/0.03$  (katabatičko/anabatičko strujanje);  $\theta_0 = 273.2$  K,  $\Gamma = 3$  K km<sup>-1</sup>,  $K = \text{konst} = 0.03/3.0$  m<sup>2</sup>s<sup>-1</sup> i  $C = -6/+6$  °C (katabatičko/anabatičko strujanje). Prikazat će se vertikalni profili svakog pojedinog člana na desnoj strani jednadžbe (51), kao i njihova razlika koja je jednakna lijevoj strani jednadžbe, odnosno lokalnoj promjeni totalne energije. Pretpostavka je da je model stacionaran, pa lijeva strana jednadžbe (51) mora biti jednak nuli.

Jednadžba (51) rješava se numerički. Metode konačnih razlika (eng. finite difference methods) se svode na diskretizaciju koja omogućava rješavanje diferencijalnih i parcijalnih diferencijalnih jednadžbi na način da se sve prisutne derivacije u njima aproksimiraju konačnim razlikama (npr. Grossmann i sur., 2007.). Postoje tri osnovne sheme konačnih razlika: razlike unaprijed, razlike unatrag, te centralne razlike. Prve dvije osnovne sheme su prvog reda točnosti,  $O(h)$ , dok su centralne razlike drugog reda točnosti,  $O(h^2)$ , što znači da im je lokalna pogreška diskretizacije za jedan red manja nego kod ostalih dviju shema, i time daju, u principu, točniju aproksimaciju. Raspis shema je sljedeći:

$$\begin{aligned} \text{Razlike unatrag : } & \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)_j = \frac{u_j - u_{j-1}}{\Delta z} + O(h) \\ \text{Razlike unaprijed : } & \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)_j = \frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta z} + O(h) \\ \text{Centralne razlike : } & \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)_j = \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta z} + O(h^2) \end{aligned}$$

gdje je uobičajena oznaka  $u_j = u(x_j)$ , a  $h$  je "korak" sheme. Centralne razlike su u stvari aritmetička sredina razlika unaprijed i unatrag. Prikazujući grafički vertikalne profile pojedinih članova iz (51) za sve tri sheme uvideno je da to vri-

jedi i za ovaj slučaj, pa je za prikaz svih rezultata izabrana općenito najtočnija shema centralnih razlika. Druga derivacija aproksimira se centralnim razlikama na sljedeći način:

$$\left( \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)_j = \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{(\Delta z)^2} + O(h^2) \quad (53)$$

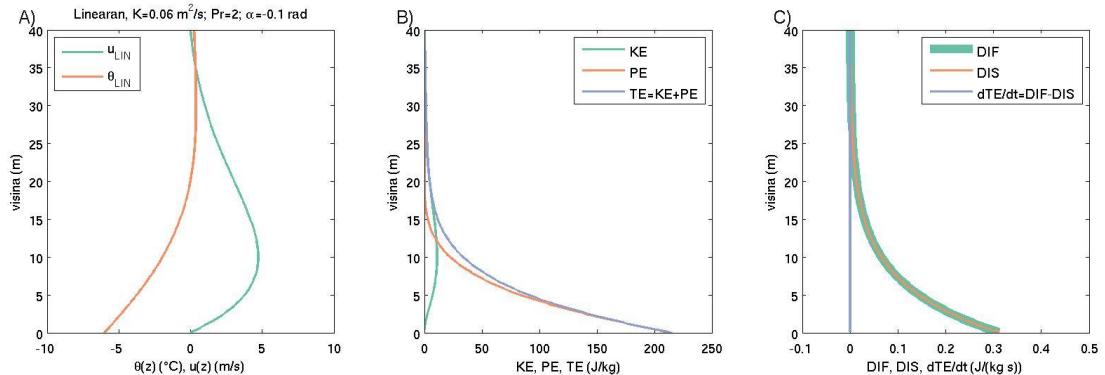
Navedene sheme su često korištene i mogu se naći u Morton (1996.), Durran (1999.), Roos i sur. (2008.).

### 3 Rezultati i diskusija

#### 3.1 Katabatičko strujanje

##### 3.1.1 Linearan slučaj

Na Slici 7A prikazani su vertikalni profili potencijalne temperature  $\theta_{lin}$  i brzine  $u_{lin}$  za linearan slučaj katabatičkog strujanja za osnovne vrijednosti parametara ( $Pr = 2$ ,  $\alpha = -0.1$  rad). Porast  $\theta_{lin}$  u prvih  $\sim 30$  m nad kosinom (visina varira s promjenom  $Pr$  i  $\alpha$ ) ukazuje na statički vrlo stabilan profil potencijalne temperature. Zbog donjeg neproklizavajućeg rubnog uvjeta, brzina  $u_{lin}$  na površini kosine iščezava, te raste s udaljavanjem od nje do svog maksimuma u niskoj mlaznoj struji na visini  $h_j \sim 10$  m (također ovisi o izboru  $Pr$  i  $\alpha$ ), nakon čega joj se iznos smanjuje.

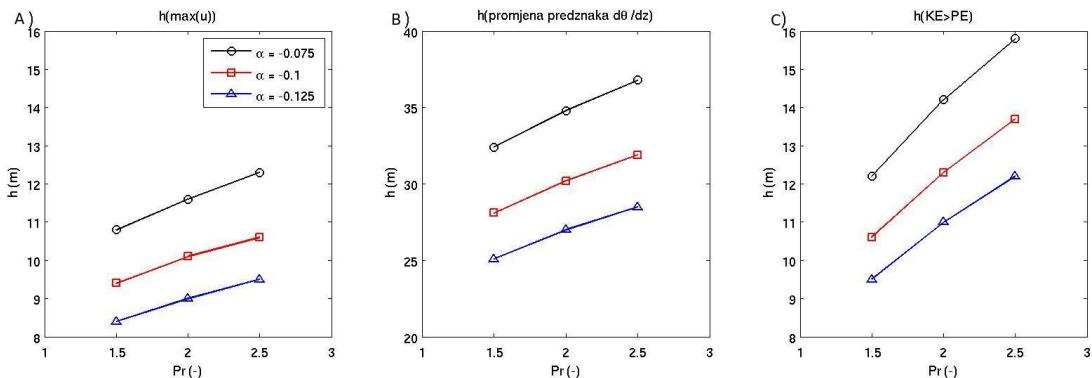


Slika 7: Vertikalni profili potencijalne temperature i brzine katabatičkog strujanja za linearan slučaj (A), pripadne potencijalne  $PE$ , kinetičke  $KE$  i totalne energije  $TE = KE + PE$ . (B), te difuzije  $DIF$ , disipacije  $DIS$  i njihove razlike  $dTE/dt$  (C).

Na Slici 7B prikazani su pripadni vertikalni profili potencijalne  $PE$ , kinetičke  $KE$  i totalne energije  $TE = KE + PE$ . S obzirom da je brzina, a time i  $KE$  katabatičkog strujanja na površini kosine nula, slijedi da je  $TE = PE \neq 0$ , jer je  $PE$  definirana kao funkcija kvadrata srednje potencijalne temperature (gdje potencijalna temperatura na površini, prema (9), odgovara površinskom deficitu  $C$  različitom od nule), a ne kao funkcija visine. S obzirom na kvadratnu ovisnost, vrijednost  $PE$  naglo opada, te se njena maksimalna vrijednost pri površini od **215.4 J/kg** prepovodi već u prvih 5 m. U ovakovom linearnom katabatičkom strujanju postoji savršena ravnoteža između članova difuzije  $DIF$  i disipacije  $DIS$ ,

što ukazuje na stacionarnost strujanja i očuvanje energije sustava ( $dTE/dt = 0$ ; Slika 7C).

Slika 8 sažimlje svih 9 rješenja linear nog katabatičkog strujanja i ukazuje na ovisnosti rješenja o promjeni Prandtlovog broja  $Pr$  i nagiba kosine  $\alpha$ . Tako npr. visina NMS-a raste s porastom  $Pr$  za fiksni nagib  $\alpha$ , ali se smanjuje s porastom apsolutnog iznosa  $\alpha$  za fiksni  $Pr$  (Slika 8A). Preciznije rečeno, za  $\alpha = -0.1$  rad (crvena linija), visina NMS-a od **9.4 m** za  $Pr = 1.5$  naraste na **10.6 m** za  $Pr = 2.5$ , dok se za  $Pr = 2.5$  visina NMS-a od **12.3 m** za  $\alpha = -0.075$  rad smanji na **9.5 m** za  $\alpha = -0.125$  rad. S obzirom da je  $Pr$  definiran kao omjer koeficijenta vrtložne difuzivnosti i koeficijenta vrtložne konduktivnosti za toplinu, porast  $Pr$ -a ukazuje na porast razmjene impulsa u odnosu na toplinu, što za posljedicu ima guranje NMS-a prema većim visinama. Spuštanje NMS-a s porastom  $\alpha$  poznata je karakteristika katabatičkog strujanja dobivena i u Prandtlovom modelu i LES (eng. Large eddy simulation) simulacijama u Grisogono i Axelsen (2012.). Što se tiče brzine NMS-a, tj. maksimuma  $u_{lin}$ , ona se smanjuje s povećanjem  $Pr$ , npr. s **5.5 m/s** za  $Pr = 1.5$  opada na **4.2 m/s** za  $Pr = 2.5$  (Dodatak, Slika A1A), dok je neovisna o promjeni  $\alpha$ .



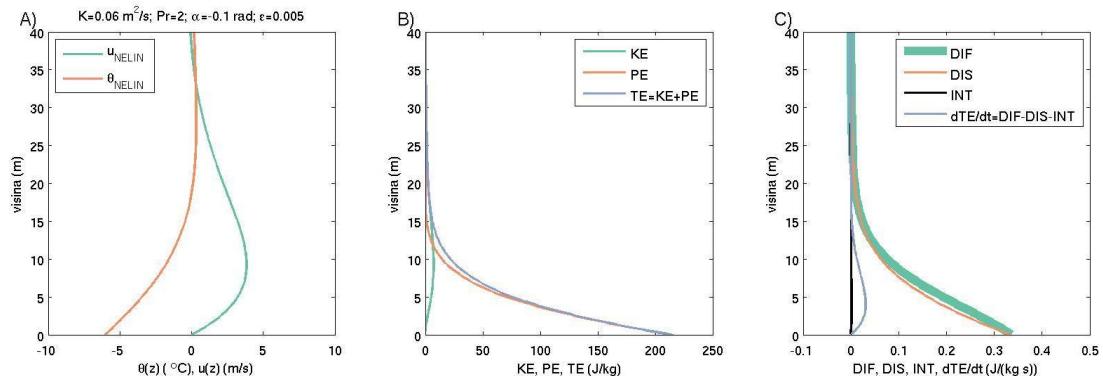
Slika 8: Visine NMS-a,  $h_j$  (A) i promjene stabilnosti (B), te visine na kojoj  $KE$  postaje veća od  $PE$  (C) kao funkcije nagiba kosine  $\alpha$  (različite boje) i Prandtlovog broja (x osi).

Potencijalna temperatura  $\theta_{lin}$  na početku raste i njen vertikalni gradijent je pozitivan, no na određenoj visini mijenja svoj predznak, te dolazi do slojevite promjene statički stabilnih atmosferskih uvjeta u nestabilne. Ta visina također ovisi o odabiru  $Pr$  i  $\alpha$ , npr. za fiksni nagib  $\alpha = -0.1$  rad i za porast  $Pr = 1.5$  na  $Pr = 2.5$  visina naraste od **28.1 m** na **31.9 m** (crvena linija), ali se za fiksni  $Pr = 2.5$  i za apsolutni porast  $\alpha = -0.075$  rad na  $\alpha = -0.125$  rad smanjuje s **36.8 m** na **28.5 m** (Slika 8B).

Na Slici 8C promatra se, u ovisnosti o  $Pr$  i  $\alpha$ , visina na kojoj kinetička energija  $KE$  postaje veća od potencijalne  $PE$ , koja uvelike dominira na manjim visinama. Za  $\alpha = -0.1$  rad (crvena linija), visina na kojoj kinetička  $KE$  počinje dominirati od **10.6 m** za  $Pr = 1.5$  naraste na **13.7 m** za  $Pr = 2.5$ , dok se pri fiksnom  $Pr = 2.5$  visina od **15.8 m** za  $\alpha = -0.075$  rad smanji na **12.2 m** za  $\alpha = -0.125$  rad. Za razliku od visine na kojoj  $KE$  postaje dominantna, amplituda  $KE$  ne ovisi o promjeni  $\alpha$ , pa npr. za sve  $\alpha$  i  $Pr = 2.5$  iznosi **8.2 J/kg**, što je direktna posljedica neosjetljivosti brzine  $u_{lin}$  o nagibu  $\alpha$ . Suprotno tome, amplituda  $KE$  se smanjuje s porastom  $Pr$ , i to npr. za  $\alpha = -0.1$  rad se smanji s **14.6 J/kg** za  $Pr = 1.5$  na **8.2 J/kg** za  $Pr = 2.5$  (Dodatak, Slika A1E).

### 3.1.2 Nelinearan slučaj

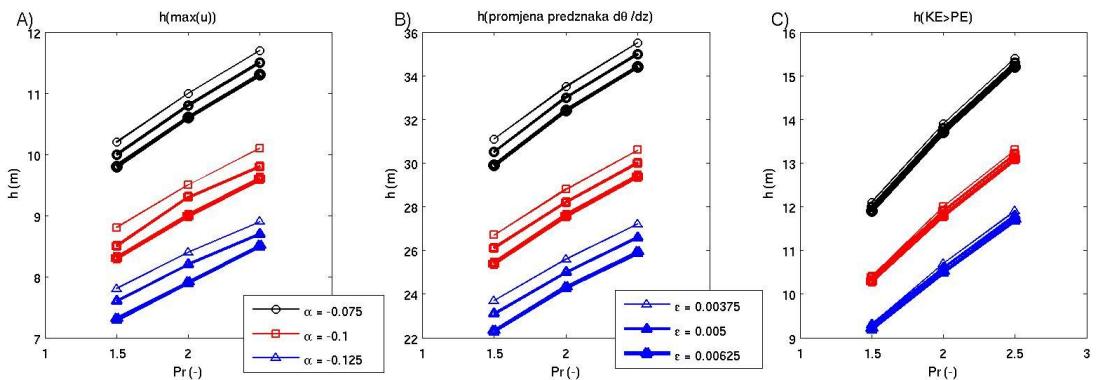
Dok smo u linearnom slučaju katabatičkog strujanja varirali osnovne parametre  $Pr$  i  $\alpha$  za  $\pm 25\%$  i tako dobili mali anasambli rješenja za  $Pr = 1.5, 2, 2.5$  i  $\alpha = -0.075, -0.1, -0.125$  rad, u nelinearnom slučaju uzimamo u obzir i parametar nestabilnosti  $\varepsilon$ , i njegovu osnovnu vrijednost variramo na isti način ( $\varepsilon = 0.00375, 0.005, 0.00625$ ). Za različite kombinacije parametara dobijemo ukupno 27 rješenja.



Slika 9: Vertikalni profili potencijalne temperature i brzine katabatičkog strujanja za nelinearan slučaj (A), pripadne potencijalne  $PE$ , kinetičke  $KE$  i totalne energije  $TE = KE + PE$ . te difuzije  $DIF$ , disipacije  $DIS$ , interakcije  $INT$  i njihove razlike  $dTE/dt$  (C).

Slika 9A prikazuje vertikalne profile potencijalne temperature  $\theta_{nelin}$  i brzine  $u_{nelin}$  za nelinearan slučaj katabatičkog strujanja za osnovne vrijednosti parametara ( $Pr = 2$ ,  $\alpha = -0.1$  rad,  $\varepsilon = 0.005$ ), a Slika 9B prikazuje pripadne vertikalne profile potencijalne  $PE$ , kinetičke  $KE$  i totalne energije  $TE = KE + PE$ . Usporedimo li te dvije slike sa Slikama 7A i 7B za linearan slučaj, uočit ćemo veliku

sličnost, s tim da u linearnom slučaju imamo slabiju stratifikaciju pri tlu, te snažnije katabatičko strujanje u odnosu na nelinearan slučaj. Suprotno njima, Slike 9C i 7C se dosta razlikuju, prvenstveno stoga što energija sustava u nelinearnom slučaju uključuje i član interakcije *INT*, potom zbog neprekapanja profila članova difuzije *DIF* i disipacije *DIS*, te konačno zbog  $dTE/dt \neq 0$ , što ukazuje na nestacionarnost sustava. Zbog toga strujanje niz padinu crpi energiju iz okolne atmosfere. Obzirom da su  $\theta_{nelin}$  i  $u_{nelin}$  po definiciji stacionarni u modelu, parametar nelinearnosti mora biti što pažljivije odabran kako bi lokalna promjena ukupne energije  $dTE/dt$  bila što bliže nuli u stacionarnom strujanju. Ipak, ovo odstupanje od stacionarnosti ukazuje na određenu energetsku nekonzistentnost postojećeg blago nelinearnog modela.



Slika 10: Visine NMS-a,  $h_j$  (A) i promjene stabilnosti (B), te visine na kojoj  $KE$  postaje veća od  $PE$  (C) kao funkcije nagiba kosine  $\alpha$  (različite boje), Prandtlovog broja (x os) i parametra nelinearnosti  $\varepsilon$  (različite debljine) za nelinearan slučaj katabatičkog strujanja.

Slika 10 daje nam bolji pregled ovisnosti rješenja o  $Pr$ ,  $\alpha$  i  $\varepsilon$ . Iako s malo nižim vrijednostima, visina NMS-a i dalje raste s porastom  $Pr$ , a smanjuje se s porastom apsolutnog iznosa  $\alpha$ , kao i u linearnom slučaju. Tako za fiksne  $\varepsilon = 0.005$  i  $\alpha = -0.1$  rad visina NMS-a poraste s **8.5 m** za  $Pr = 1.5$  na **9.8 m** za  $Pr = 2.5$  (srednja crvena linija), a za fiksne  $\varepsilon = 0.005$  i  $Pr = 2.5$  visina se smanji s **11.5 m** za  $\alpha = -0.075$  rad na **8.7 m** za  $\alpha = -0.125$  rad (Slika 10A). Što se tiče parametra nelinearnosti, njegov porast uzrokuje smanjenje visine NMS-a, pa se tako za fiksne  $\alpha = -0.075$  rad i  $Pr = 2.5$  visina smanji s **11.7 m** za  $\varepsilon = 0.00375$  na **11.3 m** za  $\varepsilon = 0.00675$ . Dok maksimalna brzina (brzina NMS-a) u linearnom slučaju opada s porastom  $Pr$  i ne ovisi o  $\alpha$ , u nelinearnom slučaju maksimum  $u_{nelin}$  opada s porastom sva tri parametra (Dodatak, Slika A1B). Tako npr. za fiksne  $\alpha = -0.075$  rad i  $Pr = 2.5$  brzina opadne s **3.7 m/s** na **3.4 m/s** s porastom  $\varepsilon$  od 0.00375 na 0.00675 (crne linije), zatim za fiksne  $\alpha = -0.075$  rad i  $\varepsilon = 0.005$  brzina se smanji s

**4.5 m/s** na **3.5 m/s** s porastom  $Pr$  od 1.5 na 2.5 (srednja crna linija), dok se za fiksne  $Pr = 2.5$  i  $\varepsilon = 0.00375$  smanji s **3.7 m/s** na **3.6 m/s** za porast apsolutnog  $\alpha$  s -0.075 rad na -0.125 rad (tanke linije). Vidimo da je iznos maksimalne brzine najmanje osjetljiv na  $\alpha$ , a najviše na  $Pr$ , što je u skladu s teorijom (Grisogono i sur., 2015.).

Visina na kojoj stabilni uvjeti prelaze u statički nestabilne zbog promjene predznaka vertikalnog gradijenta od  $\theta_{nelin}$  opada s porastom apsolutnog iznosa  $\alpha$  i nešto slabije s porastom  $\varepsilon$ , dok raste s porastom  $Pr$  (Slika 10B). Preciznije, za fiksne  $Pr = 2.5$  i  $\varepsilon = 0.005$  visina se smanji s **35 m** na **26.6 m** za porast apsolutnog  $\alpha$  od -0.075 rad na -0.125 rad (srednje linije), za fiksne  $\alpha = -0.075$  rad i  $Pr = 2.5$  visina opadne s **35.5 m** na **34.4 m** s porastom  $\varepsilon$  od 0.00375 na 0.00675 (crne linije), a za fiksne  $\alpha = -0.1$  rad i  $\varepsilon = 0.005$  visina poraste s **26.1 m** na **30 m** s porastom  $Pr$  od 1.5 na 2.5 (srednja crvena linija). U ovom slučaju visina je najosjetljivija na promjene nagiba kosine  $\alpha$ , dok se s promjenom parametra nelinearnosti puno mijenja.

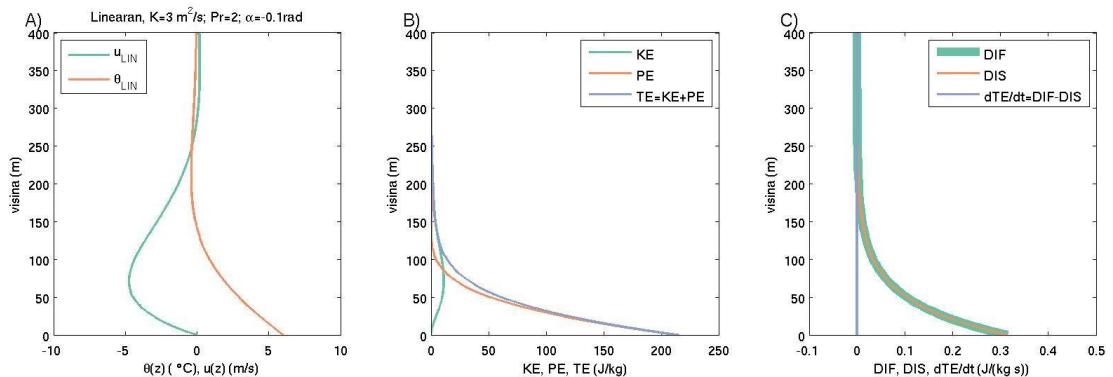
Visina na kojoj kinetička energija  $KE$  postaje veća od potencijalne  $PE$  prikazana je na Slici 10C. Njena ovisnost o parametrima analogna je onima na Slikama 10A i 10B, s tim da je osjetljivost na  $\varepsilon$  ovdje doista jako mala. Za fiksne  $\alpha = -0.075$  rad i  $Pr = 2.5$ , te porastom  $\varepsilon$  od 0.00375 na 0.00675 visina se smanji s **15.4 m** na **15.2 m** (crne linije). Za  $Pr = 2.5$  i  $\varepsilon = 0.005$ , te porast apsolutnog  $\alpha$  od -0.075 rad na -0.125 rad visina se smanji od **15.3 m** na **11.8 m** (srednje linije), a za  $\alpha = -0.1$  rad i  $\varepsilon = 0.005$ , te porast  $Pr$  od 1.5 na 2.5 visina poraste od **10.4 m** na **13.2 m** (srednja crvena linija). Osjetljivost visine na promjene  $Pr$  i  $\alpha$  u ovom slučaju je slična. Amplituda  $KE$  na visini na kojoj ona postaje veća od  $PE$  smanjuje se s porastom svih triju parametara, baš kao i maksimalna brzina  $u_{nelin}$ . Za  $\alpha = -0.1$  rad i  $\varepsilon = 0.005$ , te porast  $Pr$  od 1.5 na 2.5 amplituda  $KE$  pade s **9.1 J/kg** na **5.4 J/kg** (srednja crvena linija). Utjecaj promjene  $\varepsilon$  i  $\alpha$  na amplitudu je nešto manji (Dodatak, Slika A1F).

## 3.2 Anabatičko strujanje

Temeljna razlika anabatičkog i katabatičkog strujanja jest u postojajuju površinskog temperaturnog suficita (ovdje  $+6^{\circ}\text{C}$ ), koji potiče formiranje anabatičkog strujanja. U ovom slučaju također koristimo i veće vrijednosti koeficijenta turbulentnog miješanja i osnovnog parametra nelinearnosti, te oni sada iznose  $K=3.0 \text{ m}^2/\text{s}$  i  $\varepsilon = 0.03$ . Iako je u Grisogono i sur. (2015.) navedeno da nagib kosine  $\alpha$  u anabatičkom slučaju mora biti pozitivan, mi smo u ovom radu koristili negativan  $\alpha$ , no to nije utjecalo na dobivene rezultate.

### 3.2.1 Linearan slučaj

Radimo ansambl rješenja mijenjajući osnovne vrijednosti parametara  $\alpha = -0.1 \text{ rad}$  i  $Pr = 2$  za  $\pm 25\%$  i tako za linearno anabatičko strujanje dobijemo 9 različitih rješenja. Na Slici 11A prikazani su vertikalni profili potencijalne temperature i brzine za osnovne vrijednosti parametara. Oni su u odnosu na profile katabatičkog strujanja kvalitativno simetrični jer se sada radi o uzlaznom i dubljem strujanju. Možemo odmah uočiti da su anabatička strujanja u odnosu na katabatička dosta dublja i da se NMS nalazi na puno većim visinama.

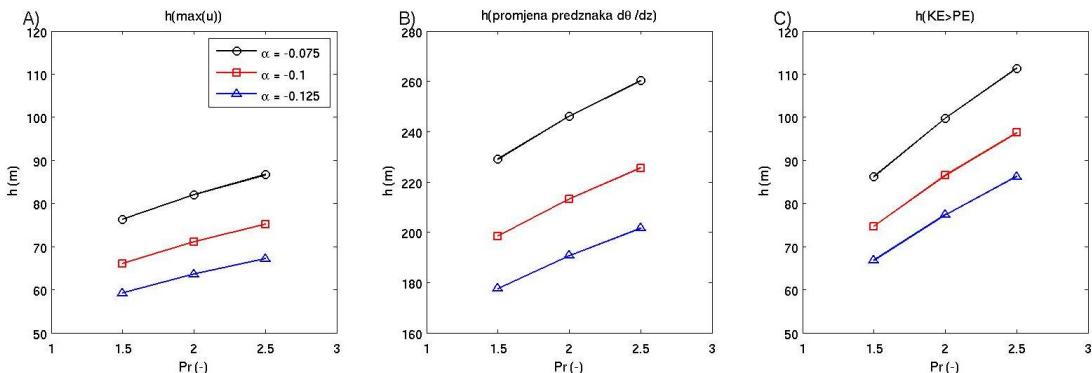


Slika 11: Vertikalni profili potencijalne temperature i brzine anabatičkog strujanja za linearan slučaj (A), pripadne potencijalne  $PE$ , kinetičke  $KE$  i totalne energije  $TE$  (B), te difuzije  $DIF$ , disipacije  $DIS$  i njihove razlike  $dTE/dt$  (C).

Vertikalni profili potencijalne  $PE$ , kinetičke  $KE$  i totalne energije  $TE = KE + PE$  analogni su onima za katabatičko strujanje, s tim da ovdje dopiru do puno većih visina (Slika 11B). Brzina strujanja i  $KE$  na površini kosine i u ovom slučaju su jednake nuli. Maksimalna vrijednost  $PE$  je pri površini i iznosi **215.4 J/kg**, što je isto kao i u katabatičkom strujanju, a posljedica je jednakih

apsolutnih vrijednosti površinskog temperaturnog suficita i deficit-a. Slika 11C ukazuje na postojanje savršene ravnoteže između članova difuzije  $DIF$  i disipacije  $DIS$ , a time i na stacionarnost strujanja i očuvanje energije sustava ( $dTE/dt = 0$ ).

Ovisnost pojedinih veličina o  $\alpha$  i  $Pr$  bolje je vidljiva na Slici 12. Visina NMS-a opada s porastom absolutne vrijednosti  $\alpha$ , a raste s porastom  $Pr$ , kao i u katabatičkom strujanju. Preciznije, za  $Pr = 2.5$  i porast absolutnog  $\alpha$  od -0.075 rad na -0.125 rad visina se smanji s **86.7 m** (najveća visina dobivena u ovom slučaju) na **67.2 m**, ali zato za  $\alpha = -0.1$  rad i porast  $Pr$  od 1.5 na 2.5 visina naraste od **66.1 m** na **75.2 m** (crvena linija). Najmanja visina na kojoj možemo naći NMS je dobivena za  $\alpha = -0.125$  rad i  $Pr = 1.5$  i iznosi **59.2 m**. Brzina NMS-a opada (u smislu absolutne vrijednosti) s porastom  $Pr$ , npr. od **-5.5 m/s** za  $Pr = 1.5$  na **-4.2 m/s** za  $Pr = 2.5$ , a neosjetljiva je na promjene  $\alpha$  (Dodatak, Slika A1C), kao i kod katabatičkog strujanja.



Slika 12: Visine NMS-a,  $h_j$  (A) i promjene stabilnosti (B), te visine na kojoj  $KE$  postaje veća od  $PE$  (C) kao funkcije nagiba kosine  $\alpha$  (različite boje) i Prandtlovog broja (x os) za linearano anabatičko strujanje.

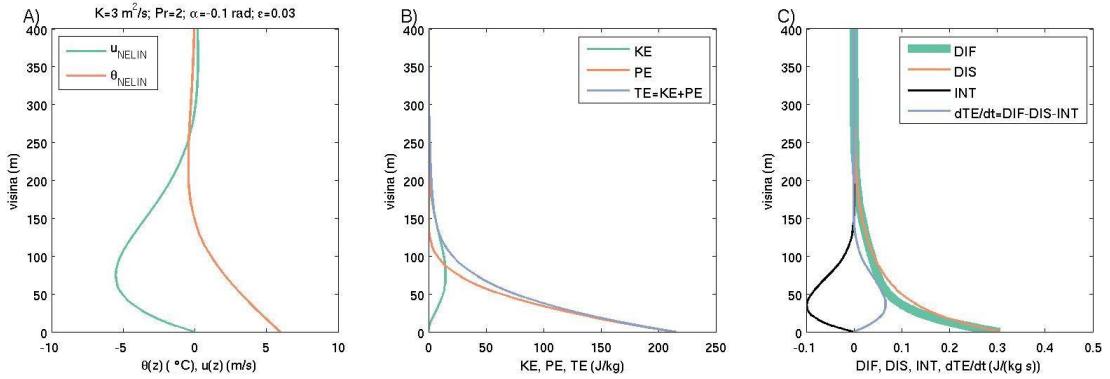
Potencijalna temperatura  $\theta_{lin}$  na početku opada s visinom i njen vertikalni gradijent je negativan, no na određenoj visini on mijenja svoj predznak, te dolazi do promjene statički nestabilnih atmosferski uvjeta u stabilne. Ta visina raste s porastom  $Pr$ , a opada s porastom absolutne vrijednosti  $\alpha$ , npr. za fiksni nagib  $\alpha = -0.1$  rad i za porast  $Pr = 1.5$  na  $Pr = 2.5$  visina naraste od **198.4 m** na **225.5 m** (crvena linija), ali se za fiksni  $Pr = 2.5$  i za absolutni porast  $\alpha = -0.075$  rad na  $\alpha = -0.125$  rad smanjuje s **260.2 m** na **201.7 m** (Slika 12B).

Visina na kojoj kinetička energija  $KE$  postaje veća od potencijalne  $PE$  jednakovo ovisi o  $Pr$  i  $\alpha$  (Slika 12C) kao i prethodno spomenute dvije visine (Slike 12A i 12B). Za  $\alpha = -0.1$  rad (crvena linija), visina na kojoj kinetička  $KE$  počinje dominirati od **74.7 m** za  $Pr = 1.5$  naraste na **96.4 m** za  $Pr = 2.5$ , dok se pri-

fiksnom  $Pr = 2.5$  visina od **111.3 m** (najveća visina dobivena u ovom slučaju) za  $\alpha = -0.075$  rad smanji na **86.3 m** za  $\alpha = -0.125$  rad. Suprotno visini na kojoj  $KE$  postaje dominantna, amplituda  $KE$  nije osjetljiva na promjenu  $\alpha$ , pa npr. za sve  $\alpha$  i  $Pr = 2.5$  iznosi **8.2 J/kg**, što je direktna posljedica neosjetljivosti brzine  $u_{lin}$  o nagibu  $\alpha$ . Također, amplituda  $KE$  se smanjuje s porastom  $Pr$ , npr. za  $\alpha = -0.1$  rad se smanji s **14.6 J/kg** za  $Pr = 1.5$  na **8.2 J/kg** za  $Pr = 2.5$ , baš kao i u katabatičkom strujanju (Dodatak, Slika A1G).

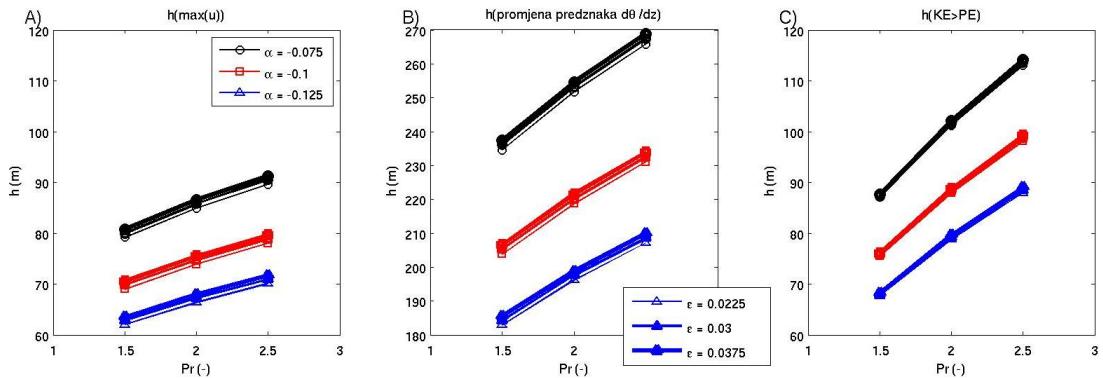
### 3.2.2 Nelinearan slučaj

Ostaje nam još za promotriti nelinearan slučaj anabatičkog strujanja. Slika 13A prikazuje vertikalne profile potencijalne temperature  $\theta_{nelin}$  i brzine  $u_{nelin}$  za osnovne vrijednosti parametara ( $Pr=2$ ,  $\alpha = -0.1$  rad,  $\varepsilon = 0.3$ ), a Slika 13B prikazuje pripadne vertikalne profile potencijalne  $PE$ , kinetičke  $KE$  i totalne energije  $TE = KE + PE$ . Te dvije slike jako su slične onima za linearan slučaj (Slike 11A i 11B), dok se Slike 13C i 11C dosta razlikuju. Energija sustava u nelinearnom slučaju uz  $DIF$  i  $DIS$  uključuje i član interakcije  $INT$ . Profili članova  $DIF$  i  $DIS$  se u nelinearnom slučaju ne preklapaju kao u linearном. Za razliku od nelinearnog katabatičkog strujanja gdje je disipacija bila manja od difuzije, u nelinearnom anabatičkom strujanju profil difuzije postiže niže vrijednosti od profila disipacije. S povećanjem parametra nelinearnosti  $\varepsilon$  na 0.03 u anabatičkom strujanju porastao je i član interakcije  $INT$  i postao dominantan u produkciji totalne energije sustava, što ukazuje na postojanje snažne interakcije između okolne atmosfere i anabatičkog strujanja. Pošto je  $dTE/dt \neq 0$ , preporučljivo je koristiti još manje vrijednosti  $\varepsilon$  kako bi lokalna promjena ukupne energije bila što bliže nuli, a time i nestacionarnost sustava što manja u ovdje analiziranom modelu.



Slika 13: Vertikalni profili potencijalne temperature i brzine anabatičkog strujanja za nelinearan slučaj (A), pripadne potencijalne  $PE$ , kinetičke  $KE$  i totalne energije  $TE$  (B), te difuzije  $DIF$ , disipacije  $DIS$ , interakcije  $INT$  i njihove razlike  $dTE/dt$  (C).

Ovisnost određenih veličina o  $Pr$ ,  $\alpha$  i  $\varepsilon$  sažeto su prikazana na Slici 14. NMS se nalazi na malo većim visinama nego u pripadnom linearном slučaju, odnosno na visinama koje su i do 8 puta veće od visina NMS-a kod nelinearnog katabatičkog strujanja. Kao i u svim dosadašnjim slučajevima, visina NMS-a raste s porastom  $Pr$ , a smanjuje se s porastom apsolutne vrijednosti  $\alpha$ , dok porast parametra nelinearnosti  $\varepsilon$  u ovom strujanju, uzrokujući porast visine NMS-a, djeluje suprotno od onog u katabatičkom (Slika 14A). Primjerice, za  $\varepsilon = 0.03$  i  $\alpha = -0.1 \text{ rad}$  visina NMS-a poraste s **69.8 m** za  $Pr = 1.5$  na **78.8 m** za  $Pr = 2.5$  (srednja crvena linija), a za  $\varepsilon = 0.03$  i  $Pr = 2.5$  visina se smanji s **90.5 m** za  $\alpha = -0.075 \text{ rad}$  na **70.9 m** za  $\alpha = -0.125 \text{ rad}$ . Za  $\alpha = -0.075 \text{ rad}$  i  $Pr = 2.5$  visina naraste s **89.6 m** za  $\varepsilon = 0.0225$  na **91.3 m** za  $\varepsilon = 0.0375$ . Uočavamo da visina NMS-a najmanje ovisi o  $\varepsilon$ , a najviše o  $\alpha$ .



Slika 14: Visine NMS-a,  $h_j$  (A) i inverzije (B), te visine na kojoj  $KE$  postaje veća od  $PE$  (C) kao funkcije nagiba kosine  $\alpha$  (različite boje), Prandtlovog broja (x os) i parametra nelinearnosti  $\varepsilon$  (različite debljine) za nelinearan slučaj anabatičkog strujanja.

Brzina NMS-a u linearnom anabatičkom strujanju opada s porastom  $Pr$  i ne ovisi o  $\alpha$ , u nelinearnom katabatičkom strujanju opada s porastom sva tri parametra, dok u nelinearnom anabatičkom strujanju njena absolutna vrijednost opada s porastom  $Pr$ , a raste s porastom apsolutne vrijednosti  $\alpha$  i  $\varepsilon$  (Dodatak, Slika A1D). Preciznije, apsolutna vrijednost brzine se za fiksne  $\alpha = -0.075$  rad i  $\varepsilon = 0.03$  smanji s **6.3 m/s** na **4.8 m/s** s porastom  $Pr$  od 1.5 na 2.5 (srednja crna linija), za fiksne  $\alpha = -0.1$  rad i  $Pr = 2.5$  naraste s **4.7 m/s** za  $\varepsilon = 0.0225$  na **5.0 m/s** za  $\varepsilon = 0.0375$  (crvene linije), dok se za  $Pr = 2.5$  i  $\varepsilon = 0.0375$  poveća s **4.9 m/s** na **5.1 m/s** za porast apsolutnog  $\alpha$  s  $-0.075$  rad na  $-0.125$  rad (deblje linije). Vidimo da je iznos maksimalne brzine najmanje osjetljiv na  $\alpha$ , a najviše na  $Pr$ .

Visina na kojoj nestabilni prelaze u statički stabilne uvjete (u katabatičkom strujanju je obrnuto) zbog promjene predznaka vertikalnog gradijenta od  $\theta_{nelin}$  opada s porastom apsolutne vrijednosti  $\alpha$ , dok raste s porastom  $Pr$  i nešto slabije s porastom  $\varepsilon$  (Slika 14B). Promjena statičke stabilnosti događa se na gotovo 8 puta većim visinama nego u katabatičkom strujanju. Pri fiksnim  $Pr = 2.5$  i  $\varepsilon = 0.03$  visina inverzije se smanji s **267.4 m** na **208.6 m** za porast apsolutnog  $\alpha$  od  $-0.075$  rad na  $-0.125$  rad (srednje linije), pri fiksnim  $\alpha = -0.075$  rad i  $Pr = 2.5$  visina poraste s **265.8 m** na **268.9 m** s porastom  $\varepsilon$  od  $0.0225$  na  $0.0375$  (crne linije), a za fiksne  $\alpha = -0.1$  rad i  $\varepsilon = 0.03$  visina poraste s **205.3 m** na **232.5 m** s porastom  $Pr$  od 1.5 na 2.5 (srednja crvena linija). U ovom slučaju visina se približno jednako mijenja s promjenama  $\alpha$  i  $Pr$ , a promjena parametra nelinearnosti na nju jako malo utječe.

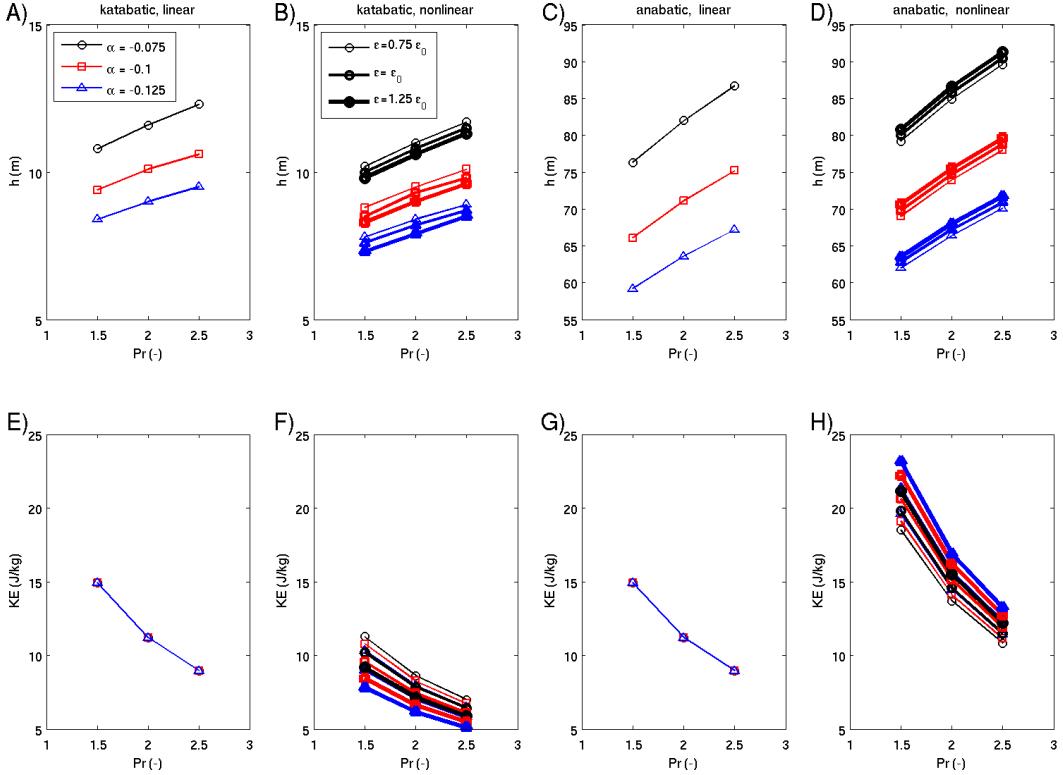
Posljednja Slika 14C prikazuje visinu na kojoj kinetička energija  $KE$  postaje veća od potencijalne  $PE$ . Njena ovisnost o parametrima analogna je onima na Slikama 14A i 14B, s tim da je osjetljivost na  $\varepsilon$  ovdje još manja. Promjena  $\varepsilon$  od pripadne minimalne do maksimalne vrijednosti uzrokuje porast visine za samo **0.5 m**. Za  $Pr = 2.5$  i  $\varepsilon = 0.0375$ , te porast apsolutnog  $\alpha$  od  $-0.075$  rad na  $-0.125$  rad visina se smanji od **114.1 m** na **89.0 m** (deblje linije), a za  $\alpha = -0.1$  rad i  $\varepsilon = 0.0375$ , te porast  $Pr$  od 1.5 na 2.5 visina poraste od **76.1 m** na **99.2 m** (deblja crvena linija). Promjene  $Pr$  i  $\alpha$  u približno istoj mjeri utječu na promjene spomenute visine, što je slučaj i u nelinearnom katabatičkom strujanju. Amplituda  $KE$  na visini na kojoj ona postaje veća od  $PE$  smanjuje se s porastom  $Pr$ , a raste s porastom ostala dva parametra, baš kao i maksimalna brzina  $u_{nelin}$ . Za  $\alpha = -0.1$  rad i  $\varepsilon = 0.03$ , te porast  $Pr$  od 1.5 na 2.5 amplituda  $KE$  pada od **20.4 J/kg** na **11.1 J/kg** (srednja crvena linija). Promjene  $\varepsilon$  i apsolutnog  $\alpha$  od najmanje do najveće vrijednosti uzrokuju porast amplitude  $KE$  za svega **1 - 1.5 m/s** (Dodatak, Slika A1H).

### 3.3 Modelirana energetika katabatičkog i anabatičkog strujanja

U ovom potpoglavlju detaljinije ćemo razmotriti ukupnu (totalnu) energiju modeliranog sustava, te lokalnu promjenu totalne energije  $dTE/dt$ , kao i članove o kojima te dvije veličine ovise. Na Slikama 7B, 9B, 11B, 13B prikazani su vertikalni profili potencijalne  $PE$ , kinetičke  $KE$  i totalne energije  $TE = KE + PE$  za pojedini slučaj strujanja. S obzirom da je  $KE$  proporcionalna kvadratu srednje brzine strujanja, a  $PE$  kvadratu srednje potencijalne temperature (što na površini odgovara površinskom deficitu različitom od nule), na površini kosine ( $h = 0$ ) kod svakog strujanja  $KE$  iznosi nula, a  $PE$  i  $TE$  su maksimalne, te iznose  $TE = PE = \mathbf{215.4 \text{ J/kg}}$ . Visina i iznos maksimuma  $PE$  i  $TE$  ( $PE_{max}$  i  $TE_{max}$ ) uvijek su isti i neovisni o  $Pr$ ,  $\alpha$  i  $\varepsilon$ . Suprotno njima, visina i iznos maksimalne  $KE$  ( $KE_{max}$ ) ovise o svim parametrima.

Visina  $KE_{max}$  (Slika 15A-D) ekvivalentna je visini NMS-a (Slike 8A, 10A, 12A, 14A). Za sva 4 slučaja visina  $KE_{max}$  raste s porastom  $Pr$  i smanjenjem apsolutnog  $\alpha$ . Kod nelinearnog katabatičkog strujanja porast parametra nelinearnosti  $\varepsilon$  uzrokuje smanjenje visine, a u anabatičkom strujanju povećanje visine  $KE_{max}$ . To proizlazi iz činjenice da je u linearnom slučaju katabatičkog strujanja brzina NMS-a veća i javlja se na većoj visini u odnosu na nelinearni slučaj, dok je taj odnos rješenja kod anabatičkog strujanja obrnut.

Raspon visina u kojem se može pojaviti  $KE_{max}$  ide od **8.4 m** (za  $\alpha = -0.125$  rad i  $Pr = 1.5$ ) do **12.3 m** (za  $\alpha = -0.075$  rad i  $Pr = 2.5$ ) za linearan slučaj (Slika 15A), a vrlo je sličan i za nelinearan slučaj katabatičkog strujanja (Slika 15B), gdje promjena  $\varepsilon$  od najmanje do najveće vrijednosti smanji visinu  $KE_{max}$  za svega **0.4 m** za određeni  $Pr$  i  $\alpha$ . U linearnom anabatičkom strujanju (Slika 15C) raspon visina  $KE_{max}$  ide od **59.2 m** (za  $\alpha = -0.125$  rad i  $Pr = 1.5$ ) do **86.7 m** (za  $\alpha = -0.075$  rad i  $Pr = 2.5$ ), a slično je i u nelinearnom slučaju gdje za određeni  $Pr$  i  $\alpha$  promjena  $\varepsilon$  od najmanje do najveće vrijednosti povisi visinu  $KE_{max}$  za **1.5 m** (Slika 15D).

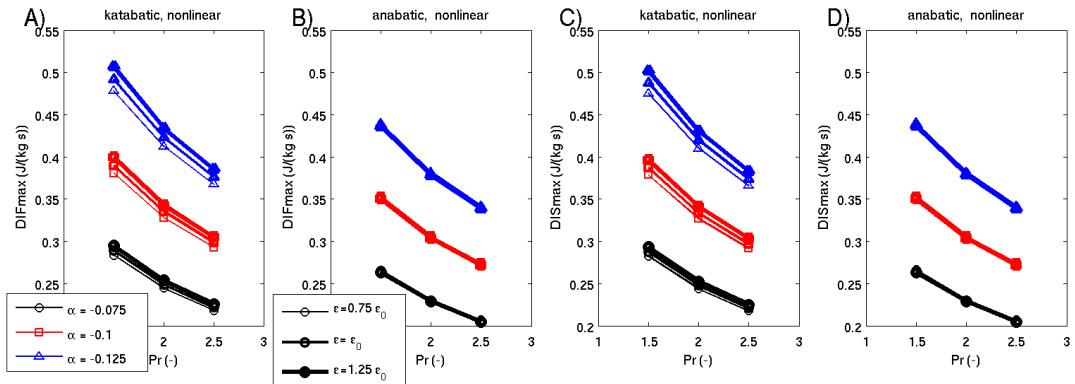


Slika 15: Visine (A-D) i amplitude maksimalne kinetičke energije  $KE$  (E-H) za linearna (A, C, E, G) i nelinearna rješenja (B, D, F, H) za katabatičko (A, B, E, F) i anabatičko strujanje (C, D, G, H) kao funkcije nagiba kosine  $\alpha$  (različite boje), Prandtlovog broja (x os) i parametra nelinearnosti  $\varepsilon$  (različite debljine), čija osnovna vrijednost  $\varepsilon_0$  iznosi  $0.005/0.03$  za katabatičko/anabatičko strujanje.

I dok s porastom  $Pr$  raste visina  $KE_{max}$ , amplituda  $KE_{max}$  opada u sva 4 slučaja strujanja. Za linearno katabatičko i anabatičko strujanje amplituda  $KE_{max}$  ne ovisi o  $\alpha$ , te se njezin raspon vrijednosti nalazi između **9 J/kg** (za  $Pr = 2.5$ ) i **14.9 J/kg** (za  $Pr = 1.5$ ) za oba strujanja (Slike 15E i 15G). Porast apsolutnog  $\alpha$  i  $\varepsilon$  u nelinearnom katabatičkom strujanju uzrokuju smanjenje amplitude  $KE_{max}$ , a u nelinearnom anabatičkom njeno povećanje. Raspon vrijednosti  $KE_{max}$  ide od **5.1 J/kg** (za maksimalne vrijednosti parametara) do **11.3 J/kg** (za minimalne vrijednosti parametara) u nelinearnom katabatičkom strujanju (Slika 15F), a od **10.8 J/kg** (za maksimalni  $Pr$  i minimalne  $|\alpha|$  i  $\varepsilon$ ) do **23.2 J/kg** (za minimalni  $Pr$  i maksimalne  $|\alpha|$  i  $\varepsilon$ ) u nelinearnom anabatičkom strujanju (Slika 15H).

Maksimumi difuzije ( $DIF_{max}$ ) i disipacije ( $DIS_{max}$ ), baš kao i  $PE_{max}$  i  $TE_{max}$ , nalaze se netom uz površinu kosine za linearna i nelinearna rješenja katabatičkog i anabatičkog strujanja. Uzrok tome su promjene strujanja i vertikalnog

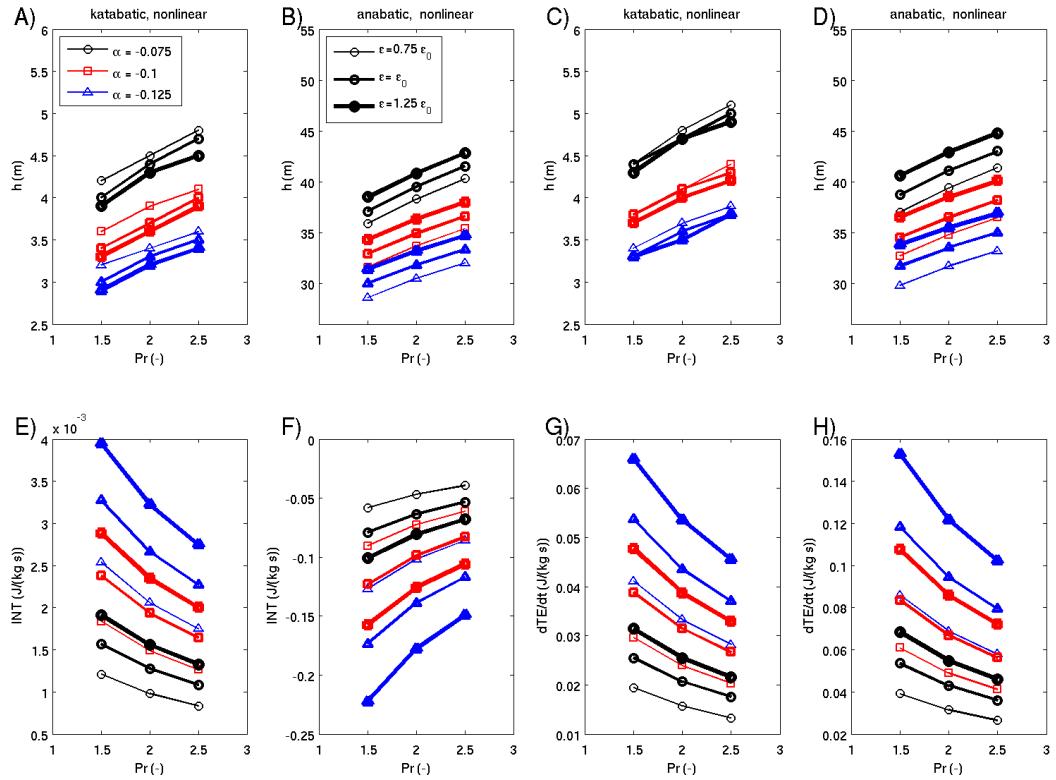
gradijenta potencijalne temperature koje su najintenzivnije u tom području. Visina  $DIF_{max}$  i  $DIS_{max}$  neovisna je o promjeni  $Pr$ ,  $\alpha$  i  $\varepsilon$  (nije prikazano), dok njihova amplituda ovisi o njima. U linearnom katabatičkom/anabatičkom strujanju (nije prikazano), kao i u nelinearnom katabatičkom/anabatičkom strujanju (Slika 16A-D) porast  $Pr$  uzrokuje smanjenje amplituda  $DIF_{max}$  i  $DIS_{max}$ , a porast  $|\alpha|$  njihovo povećanje. U linearnom strujanju postoji savršena ravnoteža između članova difuzije  $DIF$  i disipacije  $DIS$ , pa su amplitude  $DIF_{max}$  i  $DIS_{max}$  jednake za određene vrijednosti parametara i svega  $\sim 0.003$  J/kg veće u anabatičkom nego u katabatičkom strujanju (nije prikazano). U nelinearnom slučaju razlike amplituda  $DIF_{max}$  i  $DIS_{max}$  su vrlo male, te su nešto veće u katabatičkom strujanju (Slike 16A, C) nego u anabatičkom strujanju (Slike 16B, D). Nadalje, porast  $\varepsilon$  uzrokuje malo povećanje amplituda  $DIF_{max}$  i  $DIS_{max}$  u katabatičkom strujanju (Slike 16A, C), a u anabatičkom strujanju smanjenje amplituda  $DIF_{max}$  i  $DIS_{max}$ , ali tek u trećoj decimali, zbog čega je promjena neprimjetna na Slikama 16B, D. Raspon amplituda ide od  $\sim 0.2$  J/kg/s do  $\sim 0.5$  J/kg/s za sva 4 slučaja strujanja.



Slika 16: Maksimum člana difuzije  $DIF$  (A, B) i maksimum člana disipacije  $DIS$  (C, D) za nelinearna katabatička (A, C) i anabatička strujanja (B, D) kao funkcije nagiba kosine  $\alpha$  (različite boje), Prandtlovog broja (x os) i parametra nelinearnosti  $\varepsilon$  (različite debljine), čija osnovna vrijednost  $\varepsilon_0$  iznosi  $0.005/0.03$  za katabatičko/anabatičko strujanje.

Nelinearan slučaj katabatičkog i anabatičkog strujanja, osim članova difuzije i disipacije, sadrži još i član interakcije,  $INT = a\varepsilon \sin(\alpha) \left( u\theta \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)$ . On povezuje strujanje i okolnu atmosferu. Visina i amplituda njegovog maksimuma ovise o sva tri parametra. Visina  $INT_{max}$  (Slika 17A, B) ponaša se slično visini  $KE_{max}$  (Slika 15B, D), što znači da raste s porastom  $Pr$  i sa smanjenjem  $|\alpha|$  kod oba nelinearna strujanja, te raste s porastom parametra nelinearnosti  $\varepsilon$  kod anabatičkog strujanja, odnosno smanjuje se s porastom  $\varepsilon$  kod katabatičkog strujanja. Time

raspon visina  $INT_{max}$  ide od **2.9 m** (za  $\alpha = -0.125$  rad,  $Pr = 1.5$  i  $\varepsilon = 0.00625$ ) do **4.8 m** (za  $\alpha = -0.075$  rad,  $Pr = 2.5$  i  $\varepsilon = 0.00375$ ) za katabatička strujanja (Slika 17A), te od **28.6 m** (za  $\alpha = -0.125$  rad,  $Pr = 1.5$  i  $\varepsilon = 0.0225$ ) do **42.8 m** (za  $\alpha = -0.075$  rad,  $Pr = 2.5$  i  $\varepsilon = 0.0375$ ) za anabatička strujanja (Slika 17B). Može se računom pokazati da je ekstrem od  $INT$ , tj.  $INT_{max}$  jako blizu visine  $\frac{\pi}{9}h_p$ . Zbog jednakosti  $h_j = \frac{\pi}{4}h_p$ , slijedi da se visina  $INT_{max}$  nalazi blizu polovice visine NMS-a i da tu dolazi do najjače interakcije brzine strujanja,  $u$ , i perturbacije potencijalne temperature,  $\theta$ .



Slika 17: Visina maksimuma člana interakcije  $INT$  (A, B) i maksimuma člana lokalne promjene totalne energije  $dTE/dt$  (C, D), amplituda maksimuma  $INT$  (E, F) i maksimuma  $dTE/dt$  (G, H) za nelinearna katabatička (A, C, E, G) i anabatička strujanja (B, D, F, H) kao funkcije nagiba koština ( $\alpha$  različite boje), Prandtlovog broja (x os) i parametra nelinearnosti  $\varepsilon$  (različite debljine), čija osnovna vrijednost  $\varepsilon_0$  iznosi  $0.005/0.03$  za katabatičko/anabatičko strujanje.

U spomenutom rasponu visina amplituda  $INT_{max}$  je pozitivna za katabatička strujanja i varira od **0.001 J/kg/s** (za  $\alpha = -0.075$  rad,  $Pr = 2.5$  i  $\varepsilon = 0.0375$ ) do **0.004 J/kg/s** (za  $\alpha = -0.125$  rad,  $Pr = 1.5$  i  $\varepsilon = 0.00625$ ), a negativna za anabatička strujanja s varijacijama od **-0.22 J/kg/s** (za  $\alpha = -0.125$  rad,  $Pr = 1.5$  i  $\varepsilon = 0.0375$ ) do **-0.04 J/kg/s** (za  $\alpha = -0.075$  rad,  $Pr = 2.5$  i  $\varepsilon = 0.0225$ ). Iz tih

vrijednosti, kao i iz same definicije člana  $INT$ , uočavamo da absolutna vrijednost amplitude  $INTmax$  raste s porastom absolutnog  $\alpha$  i  $\varepsilon$ , a smanjuje se s porastom  $Pr$  u oba strujanju (Slike 17E, F). Porast  $Pr$  ukazuje na veću razliku među koeficijentima turbulentne difuzivnosti i konduktivnosti za toplinu, zbog čega se kovarijanca između brzine strujanja i potencijalne temperature smanjuje, pa time i iznos člana  $INT$ .

Preostaje još za promotriti lokalnu promjenu totalne energije  $dTE/dt$ . Ona je u linearном slučaju za oba strujanja jednaka nuli, što ukazuje na stacionarnost strujanja i očuvanje energije sustava. I dok se u linearnom slučaju vertikalni profili članova difuzije i disipacije savršeno preklapaju, u nelinearnom slučaju ne dolazi do međusobne kompenzacije članova  $DIF$ ,  $DIS$  i  $INT$ . Zbog toga je  $dTE/dt \neq 0$ , čime prepostavljena stacionarnost nije zadovoljena.

Visina maksimuma  $dTE/dt$  ovisi o sva tri parametra isto kao i visina  $INTmax$ , što znači da raste s porastom  $Pr$  i sa smanjenjem  $|\alpha|$  kod oba nelinearna strujanja, te se s porastom  $\varepsilon$  smanjuje kod katabatičkog strujanja, odnosno raste kod anabatičkog strujanja (Slike 17C, D). Raspon visina ide od **3.3 m** do **5.1 m** u katabatičkom, te od **29.8 m** do **44.8 m** u anabatičkom strujanju. Ovisnost amplitude maksimuma  $dTE/dt$  o parametrima u oba strujanja je kao i kod  $|INTmax|$ , dakle raste s porastom  $|\alpha|$  i  $\varepsilon$ , a smanjuje se s porastom  $Pr$  (Slike 17G, H). Iznosi maksimuma  $dTE/dt$  idu od  $\sim 0.01 \text{ J/kg/s}$  do  $\sim 0.07 \text{ J/kg/s}$  u katabatičkom, te od  $\sim 0.03 \text{ J/kg/s}$  do  $\sim 0.15 \text{ J/kg/s}$  u anabatičkom strujanju.

## 4 Zaključak

Ovaj rad se bavi analitičkim modeliranjem jednostavnog termalnog strujanja na kosini. Cilj ove radnje je bio detaljnije proučavanje energetike linearne i blago nelinearnog Prandtlovog modela, te izračun doprinosa pojedinih članova u prognostičkoj jednadžbi za totalnu energiju sustava (51) za pojedino strujanje. Koristili smo linearna i nelinearna rješenja za brzinu strujanja, (8) i (23), i potencijalnu temperaturu, (9) i (24), dobivena u Grisogono i sur. (2015.), te napravili ansambl rješenja za različite veličine prisutne u energetici linearnih i nelinearnih katabatičkih i anabatičkih strujanja. Tri glavna parametra čije smo iznose pritom varirali za  $\pm 25\%$  su Prandtlov turbulentni broj  $Pr$ , nagib kosine  $\alpha$  i parametar nelinearnosti  $\varepsilon$ . U ovisnosti o njima i njihovoj promjeni prikazivali smo visine i brzine niske mlazne struje, NMS, visine i amplitude kinetičke energije  $KE$  na kojima ona postaje veća od potencijalne energije  $PE$  (Tablica 1), potom visine na kojima dolazi do promjene statičke stabilnosti, te visine i amplitude maksimuma kinetičke energije  $KE_{max}$ . U ovisnosti o  $Pr$ ,  $\alpha$  i  $\varepsilon$  promatrani su i članovi iz (52), tj. amplitude maksimuma članova difuzije,  $DIF_{max}$ , i disipacije,  $DIS_{max}$  (Tablica 2), kao i visine i amplitude maksimuma člana interakcije,  $INT_{max}$ , te maksimuma lokalne promjene totalne energije,  $dTE/dt$  (Tablica 3).

Tablica 1: Sažeti prikaz visine i absolutne vrijednosti brzine NMS-a, te visine na kojoj  $KE$  postaje veća od  $PE$  i pripadne amplitude  $KE$  u ovisnosti o parametrima  $Pr$ ,  $|\alpha|$  i  $\varepsilon$  za katabatičko linearno (KatLin) i nelinearno (KatNel), te anabatičko linearno (AnaLin) i nelinearno strujanje (AnaNel).

$h_j \nearrow$	$Pr$	$ \alpha $	$\varepsilon$	$ u_{NMS}  \nearrow$	$Pr$	$ \alpha $	$\varepsilon$
KatLin	$\nearrow$	$\searrow$		KatLin	$\searrow$	-	
KatNel	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	KatNel	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$
AnaLin	$\nearrow$	$\searrow$		AnaLin	$\searrow$	-	
AnaNel	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	AnaNel	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$
$h_{KE>PE} \nearrow$	$Pr$	$ \alpha $	$\varepsilon$	$KE \nearrow$	$Pr$	$ \alpha $	$\varepsilon$
KatLin	$\nearrow$	$\searrow$		KatLin	$\searrow$	-	
KatNel	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	KatNel	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$
AnaLin	$\nearrow$	$\searrow$		AnaLin	$\searrow$	-	
AnaNel	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	AnaNel	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

Tablica 2: Sažeti prikaz visine i amplitude  $KE_{max}$ , visine na kojoj dolazi do promjene statičke stabilnosti, te amplitude  $DIF_{max}$  i  $DIS_{max}$  u ovisnosti o parametrima  $Pr$ ,  $|\alpha|$  i  $\varepsilon$  za katabatičko linearno (KatLin) i ne-linearno (KatNel), te anabatičko linearno (AnaLin) i nelinearno strujanje (AnaNel).

$h_{KE_{max}}$	$\nearrow$	$Pr$	$ \alpha $	$\varepsilon$	$KE_{max}$	$\nearrow$	$Pr$	$ \alpha $	$\varepsilon$
KatLin	$\nearrow$	$\searrow$			KatLin	$\searrow$	-		
KatNel	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$		KatNel	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	
AnaLin	$\nearrow$	$\searrow$			AnaLin	$\searrow$	-		
AnaNel	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$		AnaNel	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	
<hr/>									
$h_{stab}$	$\nearrow$	$Pr$	$ \alpha $	$\varepsilon$	$DIF_{max}, DIS_{max}$	$\nearrow$	$Pr$	$ \alpha $	$\varepsilon$
KatLin	$\nearrow$	$\searrow$			KatLin	$\searrow$	$\nearrow$		
KatNel	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$		KatNel	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	
AnaLin	$\nearrow$	$\searrow$			AnaLin	$\searrow$	$\nearrow$		
AnaNel	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$		AnaNel	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	

Tablica 3: Sažeti prikaz visine i amplitude  $INT_{max}$ , te visine i amplitude maksimuma  $dTE/dt$  u ovisnosti o parametrima  $Pr$ ,  $|\alpha|$  i  $\varepsilon$  za katabatičko (KatNel) i anabatičko nelinearno strujanje (AnaNel).

$h_{INT_{max}}$	$\nearrow$	$Pr$	$ \alpha $	$\varepsilon$	$ INT_{max} $	$\nearrow$	$Pr$	$ \alpha $	$\varepsilon$
KatNel	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$		KatNel	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	
AnaNel	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$		AnaNel	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	
<hr/>									
$h_{dTE/dt_{max}}$	$\nearrow$	$Pr$	$ \alpha $	$\varepsilon$	$dTE/dt_{max}$	$\nearrow$	$Pr$	$ \alpha $	$\varepsilon$
KatNel	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$		KatNel	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	
AnaNel	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$		AnaNel	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	

U Tablicama 1-3 lako je uočljiva jednaka ovisnost visina svih navedenih veličina o  $Pr$  i  $|\alpha|$  za sve tipove strujanja. Naime, one rastu s porastom  $Pr$ , odnosno s povećanjem razlike između koeficijenta turbulentne difuzivnosti i koeficijenta turbulentne konduktivnosti za toplinu, jer pojačana vrtložnost prenosi impuls do relativno većih visina nego toplinu. Suprotno tome, povećanje nagiba kosine  $|\alpha|$  uzrokuje spuštanje položaja maksimalnih vrijednosti pojedinih veličina. Parametar nelinearnosti  $\varepsilon$  ima najmanji utjecaj na varijabilnost ansambla od 27 rješenja dobivenih za pojedino nelinearno strujanje, a svojim povećanjem uzrokuje smanjenje visina u katabatičkom, odnosno povećanje visina u anabatičkom strujanju.

Međusobna proporcionalnost brzine NMS-a, iznosa  $KE$  pri kojem ona postaje veća od  $PE$ , te iznosa  $KE_{max}$  odražava se i na jednaku ovisnost o parametrima

kod svih strujanja. One rastu sa smanjenjem  $Pr$  jer pritom dolazi do smanjenog prijenosa impulsa u visinu (obzirom na toplinu) i on ostaje koncentriran na nižim visinama. Kod linearnih strujanja spomenute veličine ne ovise o promjeni nagiba kosine  $|\alpha|$ . Za razliku od maksimuma  $u_{lin}$  koji je neovisan o  $|\alpha|$ , maksimum  $u_{nelin}$  je osjetljiv na njegovu promjenu (raste sa smanjenjem  $|\alpha|$  kod katabatičkog i s povećanjem  $|\alpha|$  kod anabatičkog strujanja), što je u skladu s rezultatima LES simulacija (Grisogono i Axelsen, 2012.). Na jednak način kao i  $\alpha$ , i  $\varepsilon$  utječe na promjenu spomenutih veličina, iako u puno manjoj mjeri.

Visina i amplituda  $PEmax$  i  $TEmax$ , te visine  $DIFmax$  i  $DISmax$  iste su za sva strujanja i ne ovise o promjeni parametara. Amplitude članova  $DIFmax$ ,  $DISmax$ ,  $INTmax$  i maksimum  $dTE/dt$  rastu sa smanjenjem  $Pr$ , analogno spomenutim amplitudama, te rastu s povećanjem  $|\alpha|$ . Difuzija ima tendenciju ujednačavanja profila strujanja, pa ona u uvjetima maksimalnog nagiba postiže svoj maksimum. Zbog sile trenja i neproklizavajućeg donjeg rubnog uvjeta pri tlu uvećek postoji smicanje vjetra. Za istu brzinu NMS-a smicanje je veće ako se NMS nalazi na nižoj visini. Za veće nagibe kosine  $|\alpha|$ , NMS se nalazi na manjim visinama, pa je smicanje na rubovima NMS-a veće, a time i disipacija veća, te također maksimalna za maksimalni  $\alpha$ .

$INTmax$  sadrži u sebi  $\sin(\alpha)$ , pa je on direktno proporcionalan s  $\alpha$ .  $dTE/dt$  je, kao razlika  $DIFmax$ ,  $DISmax$  i  $INTmax$ , također ovisan o nagibu. Porast parametra nelinearnosti  $\varepsilon$  uzrokuje porast amplituda u oba nelinearna strujanja kod svih članova osim kod  $DIFmax$  i  $DISmax$  u anabatičkom strujanja, no tu je njegov utjecaj toliko mali da je zanemariv. Porast  $\varepsilon$ , povećavajući  $dTE/dt$ , zapravo cijeli sustav udaljava od stacionarnosti, što je u suprotnosti s početnom pretpostavkom stacionarnosti strujanja niz padinu. Ta nestacionarnost nam sugerira potrebu za uvođenjem vremenske ovisnosti u blago nelinearni Prandtlov model za katabatičko i anabatičko strujanje, no obzirom da je linearno rješenje vremenski ovisnog sustava već dovoljno komplikirano (Grisogono, 2003.; Zardi i Serafin, 2014.), ništa jednostavnije se ne može očekivati ni od nelinearnog rješenja. Također postoji mogućnost da ovakva termalno tjerana strujanja zaista nemaju stacionarno rješenje nelinearnog slučaja (Axelsen, 2010.), što bi bilo u skladu s dobivenim rezultatom u ovom radu.

Postoji još jedno moguće objašnjenje nestacionarnosti spomenutog nelinearnog strujanja. Naime, u modificiranom Prandtlovom modelu je, kao i u klasičnom, pretpostavljena hidrostatičnost. Uvođenje i sile gradijenta tlaka u blago nelinearnu energetiku Prandtlovog modela rezultiralo bi pojavom dodatnog člana u jed-

nadžbi (51),  $\frac{1}{\rho_0} u \frac{dp}{dz} \sin(\alpha)$ . Taj član predstavlja kovarijancu brzine i tlaka, a može ga se zvati i članom transporta tlaka (eng. pressure transport). Njega se ne može direktno procijeniti, ali se može dobiti iz jednadžbe

$$\frac{\partial}{\partial t} (TE) = DIF - DIS - INT + \frac{1}{\rho_0} u \frac{dp}{dz} \sin(\alpha) \quad (54)$$

kao razlika ostalih, poznatih članova. Zanimljivo je da članovi  $dTE/dt$  i  $|INT|$  rastu s porastom  $|\alpha|$ , a istovremeno su i član transporta tlaka i član  $|INT|$  po definiciji proporcionalni sa  $|\sin(\alpha)|$ , te u jednadžbi za  $dTE/dt$  dolaze sa suprotnim predznacima. To u konačnici može rezultirati njihovim poništavanjem i ostvarivanjem stacionarnosti strujanja u promatranom modelu, što predstavlja dobru motivaciju za nastavak istraživanja.

U radu smo naše istraživanje energetike Prandtlovog modela ograničili samo na srednje strujanje, a u dalnjim istraživanjima mogla bi se napraviti procjena doprinosa članova prognostičke jednadžbe totalne energije sustava za ukupnu energiju, koja uz srednje stanje strujanja uključuje i turbulentno, te stanje okolne atmosfere na razini mezoskale ili velike skale. Također bi bilo vrlo korisno uvažiti doprinose ovog tipa modela u razmatranja kompleksne orografije, kao i usporediti dobiveni ansambl rješenja s mjeranjima.

## Literatura

- Axelsen, S. L., 2010. Large-eddy simulation and analytical modeling of katabatic winds. PhD dissertation, IMAU, Utrecht univ., the Netherlands, 164 str. ISBN 978-90-393-5256-4.
- Barthélemy, A., Goosse, H., Mathiot, P., Fichefet, T., 2012. Inclusion of a katabatic wind correction in a coarse-resolution global coupled climate model. *Ocean Modell.* 48, 45–54.
- Bender, C. M., Orszag, S. A., 1978. Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers. Mc Graw-Hill, Inc., SAD, 593 str.
- Berger B. W., Grisogono B., 1998. The baroclinic, variable eddy viscosity Ekman layer. An approximate analytical solution. *Boundary-Layer Meteorol.* 87, 363–380.
- Brost, R. A., Wyngaard, J.C., 1978. A model study of the stably stratified planetary boundary-layer. *J. Atmos. Sci.*, 35, 1427–1440.
- Chow, F. K., de Wekker, S. F. J., Snyder, B. J. (eds.), 2013. Mountain Weather Research and Forecasting. Springer: Dordrecht, Netherlands, 750 str.
- Durran, D. R., 1999. Numerical Methods for Wave Equations in Geophysical Fluid Dynamics. Springer–Verlag, New York, 465 str.
- Egger, J., 1990. Thermally forced flows: Theory. In: Blumen, W. (Ed.), Atmospheric Processes over Complex Terrain, No. 45 in *Meteorol. Monogr.*, Amer. Meteorol. Soc., 43–57.
- Fedorovich, E., Shapiro, A., 2009. Structure of numerically simulated katabatic and anabatic flows along steep slopes. *Acta Geophys.* 57, 981–1010, doi: 10.2478/s11600-009-0027-4.
- Grisogono, B., 1995. A generalized Ekman layer profile within gradually varying eddy diffusivities. *Q. J. R. Meteorol. Soc.* 121, 445–453.

Grisogono, B., 2003. Post-onset behaviour of the pure katabatic flow. Boundary-Layer Meteorol. 107, 157–175.

Grisogono, B., Axelsen, S. L., 2012. A Note on the pure katabatic wind maximum over gentle slopes. Boundary-Layer Meteorol. 145, 527–538.

Grisogono, B., Belušić, D., 2008. Uvod u mezoskalnu meteorologiju i atmosfersku turbulenciju, interna skripta. Geofizički odsjek PMF-a, 122 str.

Grisogono, B., Belušić, D., 2009. A review of recent advances in understanding the meso-and microscale properties of the severe Bora wind. Tellus, 61A, 1–16.

Grisogono, B., Jurlina, T., Večenaj, Ž., Gütterl, I., 2015. Weakly nonlinear Prandtl model for simple slope flows. Q. J. R. Meteorol. Soc. 141, 883–892.

Grisogono, B., Oerlemans, J., 2001a. Katabatic flow: Analytic solution for gradually varying eddy diffusivities. J. Atmos. Sci. 58, 3349–3354.

Grisogono, B., Oerlemans, J., 2001b. A theory for the estimation of surface fluxes in simple katabatic flows. Q. J. R. Meteorol. Soc. 127, 2725–2739.

Grisogono, B., Oerlemans, J., 2002. Justifying the WKB approximation in pure katabatic flows. Tellus 54A, 453–462.

Grossmann, C., Roos, H.-G., Stynes, M., 2007. Numerical treatment of partial differential equations. Springer Science & Business Media, 23 str.

Gutman, L. N., 1972. Introduction to the Nonlinear Theory of Mesoscale Meteorological Processes, Gidrometeorologicheskoe Izdatel'stvo, Leningrad. Keter Press: Jeruzalem, 224. str.

Holton, J. R., 2004. An Introduction to Dynamic Meteorology. Elsevier Academic Press, 4th edition, San Diego, USA, 535 str.

Horvath, K., Bajić, A., Ivatek-Šahdan, S., 2011. Dynamical downscaling of wind speed in complex terrain prone to bora-type flows. J. Appl. Meteorol.

Climatol. 50, 1676–1691.

Jeričević, A., Večenaj, Ž., 2009. Improvement of vertical diffusion analytic schemes under stable atmospheric conditions. Boundary-Layer Meteorol. 131, 293–307.

Jeričević, A., Kraljević, L., Grisogono B., Fagerli, H., Večenaj, Ž., 2010. Parametrization of vertical diffusion and the atmospheric boundary layer height determination in the EMEP model. Atmospheric chemistry and physics. 10, 341-364.

Jurčec, V., 1981. On mesoscale characteristics of bora conditions in Yugoslavia. Pure Appl. Geophys. 119, 640–657.

Jurlina, T., 2013. Blago - nelinearna modifikacija Prandtlovog modela katabatičkog strujanja. Diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu, 38 str.

Kavčič, I., 2010. Modeliranje atmosferskih graničnih slojeva s doprinosom teoriji singularno perturbiranih problema. Doktorska disertacija, Sveučilište u Zagrebu, 103 str.

King, J. C., Connely, W. M. Derbyshire, S. H., 2001. Sensitivity of modelled Antarctic climate to surface and boundary-layer flux parametrizations. Q. J. R. Meteorol. Soc. 127, 779-794.

Klein, T., Heinemann, G., Bromwich, D. H., Cassano, J. J., Hines, K. M., 2001. Mesoscale modeling of katabatic winds over Greenland and comparisons with AWS and aircraft data. Meteorol. Atmos. Phys. 78, 115-132.

Mahrt, L., 1981. The early evening boundary layer transition. Q. J. R. Meteorol. Soc., 107, 329-343.

Mahrt, L., 1981. Modelling the depth of the stable boundary layer. Boundary-Layer Meteorol. 21, 3–19.

Mahrt, L., 1982. Momentum balance of gravity flows. J. Atmos. Sci. 39, 2701–2711.

Mauritsen, M., Svensson, G., Zilitinkevich, S. S., Esau, I., Enger, L. and Grisogono, B., 2007. A total turbulent energy closure model for neutrally and stably stratified atmospheric boundary-layers. *J. Atmos. Sci.* 64, 4113–4126.

Morton, K. W., 1996. Numerical Solution of Convection–Diffusion Problems, Applied Mathematics and Mathematical Computation, Vol. 12. Chapman & Hall/CRC, London, 384 str.

Munro, D. S., 2004. Revisiting bulk heat transfer on Peyto Glacier, Alberta, Canada, in light of the CIG parameterization. *J. Glaciol.* 50, 590–600.

Nadeau, D. F., Pardyjak, E. R., Higgins C. W., Parlange M. B., 2013. Similarity scaling over a steep Alpine slope. *Boundary-Layer Meteorol.* 147, 401–419.

Nappo, C. J., Rao, K. S., 1987. A model study of pure katabatic flow. *Tellus* 39A, 61–71.

Nikulin, G., Kjellström, E., Hansson, U., Strandberg, G., Ullerstig, A., 2011. Evaluation and future projections of temperature, precipitation and wind extremes over Europe in an ensemble of regional climate models. *Tellus* 63A, 41–55.

Oerlemans, J., 2001. Glaciers and Climate Change. Balkema Publishers: Lisse, Netherlands, 148. str.

Parish, T. R. , Bromwich, D. H., 1991. Continental-scale simulation of the Antarctic katabatic wind regime. *J. Clim.* 4, 135–146.

Parmhed, O., Oerlemans, J., Grisogono, B., 2004. Describing the surface fluxes in the katabatic flow on Breidamerkurjokull, Iceland. *Q. J. R. Meteorol. Soc.* 130, 1137–1151.

Prandtl, L., 1942. Führer durch die Strömungslehre. Vieweg und Sohn: Braunschweig, 648 str.

Princevac, M., Fernando, H. J. S., 2007. A criterion for the genera-

tion of turbulent anabatic flows. *Phys. Fluids* 19, 105102–105107, doi: 10.1063/1.2775932.

Renfrew, I. A., 2004. The dynamics of idealized katabatic flow over a moderate slope and ice shelf. *Q. J. R. Meteorol. Soc.* 130, 1023–1045.

Renfrew, I. A., Anderson, P. S., 2006. Profiles of katabatic flow in summer and winter over Coast Land, Antarctica. *Q. J. R. Meteorol. Soc.* 132, 779–882.

Roos, H.-G., Stynes, M., Tobiska, L., 2008. Robust Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations, Springer Series in Computational Mathematics, Vol. 24. Springer–Verlag, Berlin, 604 str.

Shapiro, A., Burkholder, B., Fedorovich, E., 2012. Analytical and numerical investigation of two-dimensional katabatic flow resulting from local surface cooling. *Boundary-Layer Meteorol.* 145, 249–272.

Shapiro, A., Fedorovich, E., 2008. Coriolis Effects in homogeneous and inhomogeneous katabatic flows. *Q. J. R. Meteorol. Soc.* 134, 353–370.

Smith, C. M., and Skyllingstad, E. D., 2005. Numerical simulation of katabatic flow with changing slope angle. *Mon. Weather Rev.* 133, 3065–3080.

Stiperski, I., Kavčič, I., Grisogono, B., Durran, D. R., 2007. Including Coriolis effects in the Prandtl model for katabatic flow. *Q. J. R. Meteorol. Soc.* 133, 101–106.

Stull, R. B., 1988. An Introduction to Boundary-Layer Meteorology. Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 666 str.

Sun, J., Lenshow, D. H., Mahrt, L., Nappo, C., 2013. The relationships among wind, horizontal pressure gradient, and turbulent momentum transport during CASES-99. *J. Atmos. Sci.* 70, 3397–3414.

Svensson, G., Holtslag, A. A. M., 2009. Analysis of model results for the turning of the wind and related momentum fluxes in the stable boundary layer. *Boundary-Layer Meteorol.* 132, 261–277.

van den Broeke, M. R., 1997a. Structure and diurnal variation of the atmospheric boundary layer over a mid-latitude glacier in summer. *Boundary-Layer Meteorol.* 83, 183–205.

van den Broeke, M. R., 1997b. Momentum, heat and moisture budgets of the katabatic wind layer over a mid-latitude glacier in summer. *J. Appl. Meteorol.* 36, 763–774.

van den Broeke, M. R., van Lipzig, N. P. M., 2003. Factors controlling the near-surface wind field in Antarctica. *Mon. Weather Rev.* 131, 733–743.

Weng, W., Taylor, P. A., 2003. On modelling the one-dimensional atmospheric boundary layer. *Boundary-Layer Meteorol.* 107, 371–400.

Whiteman, C. D., 1990. Observations of Thermally Developed Wind System In Mountainous Terrain. In: Blumen, W. (Ed.), *Atmospheric Processes Over Complex Terrain*, No. 45 in *Meteorol. Monogr.*, Amer. Meteorol. Soc., 5–42.

Whiteman, C. D., 2000. *Mountain Meteorology: Fundamentals and Applications*. Oxford University Press, New York, 355 str.

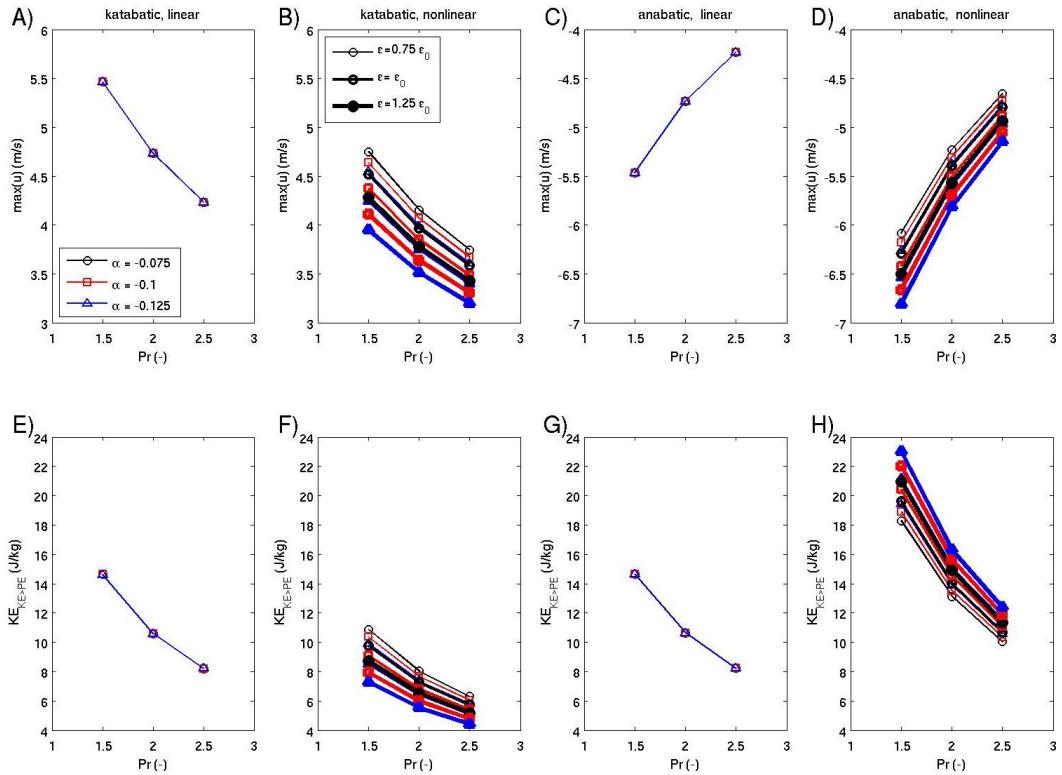
Yoshino, M. M., 1976. *Local Wind Bora*. University of Tokyo Press, Tokyo , 289 str.

Zardi, D., Serafin, S., 2014. An analytic solution for time-periodic thermally driven slope flows. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, doi: 10.1002/qj.2485.

Zardi, D., Whiteman, C. D., 2013. Diurnal mountain wind systems. In *Mountain Weather Research and Forecasting*, Chow, F. K., de Wekker, S. F. J., Snyder, B. J. (eds.), Springer: Dordrecht, Netherlands, 35–119, 750 str.

Zilitinkevich, S., Savijärvi, H., Baklanov, A., Grisogono, B., Myrberg, K., 2006. Forthcoming meetings on planetary boundary-layer theory, modelling and applications. *Boundary-Layer Meteorol.* 119, 591–593.

## Dodatak A



Slika A1: Brzine NMS-a (A-D) i amplitude  $KE$  na visini na kojoj postaje veća od  $PE$  (E-H) za linearna (A, C, E, G) i nelinearna rješenja (B, D, F, H) za katabatičko (A, B, E, F) i anabatičko strujanje (C, D, G, H) kao funkcije nagiba kosine  $\alpha$  (različite boje), Prandtlovog broja (x os) i parametra nelinearnosti  $\varepsilon$  (različite debljine), čija osnovna vrijednost  $\varepsilon_0$  iznosi 0.005/0.03 za katabatičko/anabatičko strujanje.