1. Uvod

Kada se dogodi potres, energija koja se pri tome oslobodi jednim se dijelom pretvori u seizmičke valove, a drugim (većim dijelom) u toplinu. Da je Zemlja neomeđeno homogeno sredstvo kroz nju bi se rasprostirala dva prostorna vala – longitudinalni i transverzalni, kako je to pokazao S.D. Poisson.

(S.D. Poisson, 1781.-1840.)

Međutim, Zemlja je slojevita, ima slobodnu površinu i kvazi-elipsoidalnog je oblika (geoid). Zbog oblika i slojevite strukture dolazi do različitih pojava pri prolazu seizmičkih valova kroz njezinu unutrašnjost (lom, refleksija, generiranje površinskih valova, disperzija, atenuacija, ...). U Seizmologiji I i II studenti slušaju o površinskim valovima i uče pod kojim uvjetima nastaju. Pokazano je postojanje pojave disperzije tih valova u slojevitom sredstvu (njihova brzina ovisna je o valnom broju i periodu vala). Međutim, razmatrao se najjednostavniji slučaj postojanja površinskih valova, u poluprostoru za Rayleigheve, te u modelu koji se sastoji od jednog sloja iznad poluprostora za Loveove valove. U ovom kolegiju naučit ćemo kako izračuanti fazne i grupne brzine površinskih valova koji se rasprostiru u modelu s po volji velikim brojem slojeva iznad poluprostora.

Općenito, postoje dva pristupa određivanju disperzije površinskih valova. Prva, starija metoda, sastoji se u računanju vrijednosti determinante (4n-2)-og reda (n je broj slojeva). Determinanta predstavlja jednadžbu disperzije u kojoj postoji implicitna veza između fazne brzine c i valnog broja k. Upotreba takve metode ograničena je na troslojno sredstvo zbog numeričkih teškoća svojstvenih rješavanju determinanti velikog reda. Godine 1953. N. A. Haskell razvio je, na temelju Thomsonovog matričnog postupka za transmisiju elastičkih valova kroz višeslojno sredstvo, matričnu metodu opisivanja rasprostiranja površinskih valova kroz višeslojno sredstvo. Matrični račun je koristan jer općenito omogućuje bolju preglednost cijelog izraza, te pomaže da se ne zaborave uključiti svi članovi izraza (kojih može biti mnogo). Razvoj (brzih) računala oko 1960. godine omogućio je od tada široku primjenu tzv. Thomson-Haskellove (ili matrične) metode pri rješavanju jednadžbe disperzije. Zašto je to bitno?

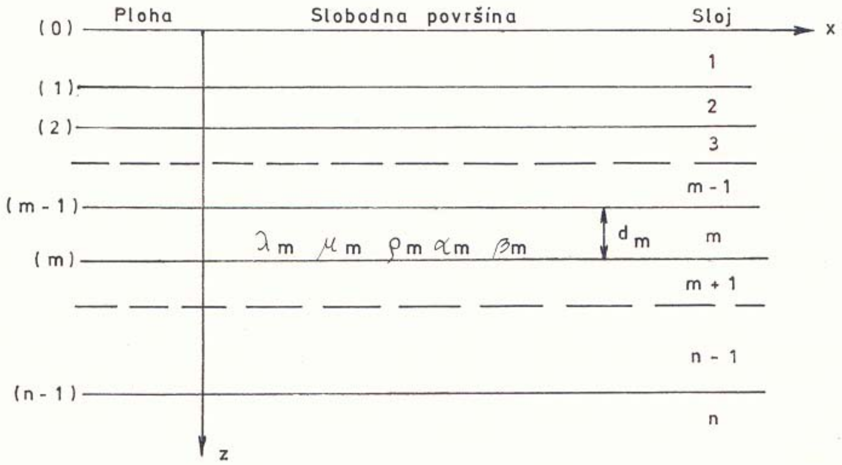

Lord Rayleigh (1842–1919.)


A.E.H. Love (1863–1940.)

Razmatranje (određivanje) fazne i grupne brzine Rayleighevih i Loveovih valova i interpretacija disperzivnih krivulja za uslojene modele Zemlje uvelike pridonosi poznavanju fizikalnih svojstava Zemljine kore i plašta, što je i jedan od zadataka primijenjene seizmologije.

2. Rasprostiranje valova u sredstvu s proizvoljnim brojem slojeva

Pretpostavit ćemo da se slojevitim sredstvom rasprostiru ravni valovi kutne frekvencije *p* i fazne brzine *c*. Pod slojevitim sredstvom smatramo poluprostor sastavljen od *n* paralelnih, homogenih, izotropnih slojeva. Svi slojevi su kruti i ne razmatra se slučaj koji uključuje fluidni sloj. Slika 1 prikazuje smjer koordinatnih osi i način označavanja slojeva i graničnih ploha.



Sl. 3.1.1.

Neka se valovi rasprostiru u smjeru + x-osi. Pozitivna z-os usmjerena je u sredstvo. Numeracija slojeva i graničnih ploha teče od slobodne površine kao što je prikazano na slici. Pretpostavlja se da nema pomaka u smjeru osi y i da se amplitude valova u poluprostoru eksponencijalno smanjuju s dubinom.

Pri izvodjenju Thomson-Haskellove metode ili matrične metode rasprostiranja služit ćemo se ovom notacijom (gdje se indeks m odnosi na m-ti sloj):

p = kutna frekvencija = $2\pi/T$ (T = period)

c = fazna brzina

ρ_m = gustoća

d_m = debljina sloja

λ_m, μ_m = Laméove konstante

$\alpha_m = [(\lambda_m + 2\mu_m)/\rho_m]^{1/2}$ = brzina dilatacionih valova

$\beta_m = [\mu_m/\rho_m]^{1/2}$ = brzina rotacionih valova

$k = p/c = 2\pi/L$ (L = duljina vala)

$$r_{\alpha m} = \begin{cases} +[(c/\alpha_m)^2 - 1]^{1/2} & \text{za} \quad c > \alpha_m \\ -i[1 - (c/\alpha_m)^2]^{1/2} & \text{za} \quad c < \alpha_m \end{cases}$$

$$r_{\beta m} = \begin{cases} +[(c/\beta_m)^2 - 1]^{1/2} & \text{za} \quad c > \beta_m \\ -i[1 - (c/\beta_m)^2]^{1/2} & \text{za} \quad c < \beta_m \end{cases}$$

$$\gamma_m = 2(\beta_m/c)^2$$

u, w = komponente pomaka u smjeru x i z-osi

$\sigma = p_{zz}$ = normalna komponenta napetosti

$\tau = p_{zx}$ = tangencijalna komponenta napetosti

Polazimo od jednadžbe gibanja:

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2}(u, w) = (\lambda + \mu)\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\theta + \mu\nabla^2(u, w)$$

---

uz zanemarenje volumnih sila, te vidimo da se u slučaju kada djeluju jedino sile elastičke deformacije sredstvom rasprostiru dva vala - longitudinalni i transverzalni.

Valna jednadžba u slučaju Rayleigevih valova ima ova dva oblika:

$$\rho\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}=(\lambda+2\mu)\nabla^2\theta \qquad (3.1.1.)$$

$$\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\operatorname{rot}\vec{u}\right)_y=\mu\nabla^2\left(\operatorname{rot}\vec{u}\right)_y \qquad (3.1.2.)$$

Jednadžba (3.1.1.) znači da se sredstvom može rasprostirati dilatacija volumena brzinom $\alpha=\sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}$, a jednadžba (3.1.2.) znači da se sredstvom rasprostire ekvivolumni poremećaj brzinom $\beta=\sqrt{\mu/\rho}$.

Stoga se rješenje za valne jednadžbe za *m*-ti sloj može izraziti kao suma rješenja za dilatacijske i rotacijske valove, tj. za dilatacijski val (P):

$$\Delta_m=\underbrace{\operatorname{div}\vec{u}_m}_{=\theta}=\frac{\partial u_m}{\partial x}+\frac{\partial w_m}{\partial z}=f_m(z)e^{i(pt-kx)}$$

i rotacijski val (S):

$$\omega_m=\frac{1}{2}\left(\operatorname{rot}\vec{u}_m\right)_y=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_m}{\partial z}-\frac{\partial w_m}{\partial x}\right]=g_m(z)e^{i(pt-kx)}$$

Ta rješenja znače da se ravni val rasprostire brzinom $c(=p/k)$ u smjeru +x-osi, a budući se radi o površinskom valu, rješenje sadrži i ovisnost o aplikati, ($f_m(z),g_m(z)$), pri čemu za velike udaljenosti od slobodne površine funkcije $f_m(z),g_m(z)\to 0$.

Funkcije *f*, *g* i parametri *k*, *c* određuju se tako da budu zadovoljeni: jednadžbe gibanja, rubni uvjeti i pretpostavke o površinskom valu. Prema tome, uvrstimo li rješenje za npr. Δ_m u valnu jednadžbu (3.1.1.) dobije se:

$$\frac{d^2 f_m(z)}{dz^2} + k^2 r_{\alpha m}^2 f(z) = 0$$

gdje je $r_{\alpha m}^2 = \left(\frac{c^2}{\alpha_m^2} - 1\right)$.

Pretpostavimo li da je opće rješenje te homogene diferencijalne jednadžbe oblika $f(z) \sim e^{bz}$, a b je konstanta koju treba odrediti tako da bude zadovoljena jednadžba, dobivamo:

$$b^2 + k^2 r_{\alpha m}^2 = 0$$

te je:

$$b = \pm i k r_{\alpha m}, \qquad i = +\sqrt{-1}$$

Funkcija $f_m(z)$ tada ima oblik:

$$f_m(z) = \Delta_m' e^{-ikr_{\alpha m} z} + \Delta_m'' e^{ikr_{\alpha m} z},$$

a analogno dobijamo rješenje i za $g_m(z)$:

$$g_m(z) = \omega_m' e^{-ikr_{\beta m} z} + \omega_m'' e^{ikr_{\beta m} z}$$

Amplitude Δ_m', Δ_m'', ω_m', ω_m'' odredjuju se iz rubnih uvjeta.
Prema tome, rješenja valnih jednadžbi (3.1.1.) i (3.1.2.) glase:

$$\begin{aligned} \Delta_m &= e^{i(pt-kx)}\left(\Delta_m' e^{-ikr_{\alpha m} z} + \Delta_m'' e^{ikr_{\alpha m} z}\right) \\ \omega_m &= e^{i(pt-kx)}\left(\omega_m' e^{-ikr_{\beta m} z} + \omega_m'' e^{ikr_{\beta m} z}\right) \end{aligned} \qquad (3.1.3.)$$

Veza izmedju rješenja Δ_m i ω_m i potencijala (poglavlje 2.) ϕ_m i $\vec{\psi}_m$ za P i S val, može se izraziti s:

$$\Delta_m = \nabla^2 \phi_m, \qquad 2\omega_m = -\nabla^2 \psi_m, \qquad \text{odnosno}$$

$$\phi_m = -\left(\frac{\alpha_m}{p}\right)^2 \Delta_m, \qquad \psi_m = 2\left(\frac{\beta_m}{p}\right)^2 \omega_m$$

Na taj način se komponente pomaka i napetosti mogu izraziti pomoću Δ_m i ω_m umjesto preko potencijala ϕ_m i ψ_m (2.4.). Tada, horizontalna i vertikalna komponenta pomaka imaju ovaj oblik:

$$u_m = \frac{\partial \phi_m}{\partial x} - \frac{\partial \psi_m}{\partial z} = -\left(\frac{\alpha_m}{p}\right)^2 \frac{\partial \Delta_m}{\partial x} - 2\left(\frac{\beta_m}{p}\right)^2 \frac{\partial \omega_m}{\partial z}$$

$$w_m = \frac{\partial \phi_m}{\partial z} + \frac{\partial \psi_m}{\partial x} = -\left(\frac{\alpha_m}{p}\right)^2 \frac{\partial \Delta_m}{\partial z} + 2\left(\frac{\beta_m}{p}\right)^2 \frac{\partial \omega_m}{\partial x}$$

Komponente napetosti glase:

$$\sigma_m = p_{zz} = \lambda_m \Delta_m + 2\mu_m \frac{\partial w_m}{\partial z} = \rho_m \left\{ \alpha_m^2 \Delta_m + 2\beta_m^2 \left[\left(\frac{\alpha_m}{p}\right)^2 \frac{\partial^2 \Delta_m}{\partial x^2} + 2\left(\frac{\beta_m}{p}\right)^2 \frac{\partial^2 \omega_m}{\partial x \partial z} \right] \right\}$$

$$\tau_m = p_{zx} = \mu_m \left(\frac{\partial w_m}{\partial x} + \frac{\partial u_m}{\partial z} \right) = 2\rho_m \beta_m^2 \left\{ -\left(\frac{\alpha_m}{p}\right)^2 \frac{\partial^2 \Delta_m}{\partial x \partial z} + \left(\frac{\beta_m}{p}\right)^2 \left[\frac{\partial^2 \omega_m}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \omega_m}{\partial z^2} \right] \right\} \tag{3.1.4.}$$

Ti izrazi za komponente pomaka i napetosti potrebni su nam zbog uvjeta koje moraju zadovoljiti rješenja (3.1.3.) valnih jednadžbi. Kao što je već ranije pokazano na svakoj graničnoj plohi imamo četiri rubna uvjeta: neprekidnost dvije komponente pomaka i dvije komponente napetosti, uz iščezavanje komponenata napetosti na slobodnoj površini.

Radi preglednijih izraza, umjesto komponenata pomaka u i w uvjet neprekinutosti će se primijeniti na bezdimenzionalne veličine $\dot{u}/c$ i $\dot{w}/c$, što je moguće jer je fazna brzina konstantna i jednaka u svim slojevima. Ubuduće ćemo dakle razmatrati neprekinutost ove četiri veličine:

$$\frac{\dot{u}}{c}\ ,\ \frac{\dot{w}}{c}\ ,\sigma\ ,\ \tau\ .$$

Izraz za $\dot{u}$ se dobije ovako:

$$\dot{u}_m = \frac{\partial u_m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left[-\left(\frac{\alpha_m}{p}\right)^2 \frac{\partial \Delta_m}{\partial x} - 2\left(\frac{\beta_m}{p}\right)^2 \frac{\partial \omega_m}{\partial z}\right]$$

supstituirajući rješenja (3.1.3.) u tu relaciju dobivamo:

$$\dot{u}_m = \frac{\partial}{\partial t}\left\{-\left(\frac{\alpha_m}{p}\right)^2 \frac{\partial}{\partial x} e^{i(pt-kx)}\left[\Delta_m' e^{-ikr_{\alpha m}z} + \Delta_m'' e^{ikr_{\alpha m}z}\right] - \right.$$

$$\left. - 2\left(\frac{\beta_m}{p}\right)^2 \frac{\partial}{\partial z} e^{i(pt-kx)}\left[\omega_m' e^{-ikr_{\beta m}z} + \omega_m'' e^{ikr_{\beta m}z}\right]\right\}$$

Izrazimo li eksponencijalne funkcije trigonometrijskim funkcijama argumenata $kr_{\alpha m}z$ i $kr_{\beta m}z$ slijedi:

$$\dot{u}_m = -\left(\frac{\alpha_m}{p}\right)^2 pk\, e^{i(pt-kx)}\left[(\Delta_m' + \Delta_m'')\cos kr_{\alpha m}z - i(\Delta_m' - \Delta_m'')\sin kr_{\alpha m}z\right] -$$

$$- 2\left(\frac{\beta_m}{p}\right)^2 pkr_{\beta m} e^{i(pt-kx)}\left[(\omega_m' - \omega_m'')\cos kr_{\beta m}z - i(\omega_m' + \omega_m'')\sin kr_{\beta m}z\right] =$$

$$= -\frac{\alpha_m^2}{c} e^{i(pt-kx)}\left[(\Delta_m' + \Delta_m'')\cos kr_{\alpha m}z - i(\Delta_m' - \Delta_m'')\sin kr_{\alpha m}z\right] -$$

$$- 2\frac{\beta_m^2}{c} r_{\beta m} e^{i(pt-kx)}\left[(\omega_m' - \omega_m'')\cos kr_{\beta m}z - i(\omega_m' + \omega_m'')\sin kr_{\beta m}z\right]$$

$\frac{\dot{u}}{c}$, $\frac{\dot{w}}{c}$, σ , τ .

Izraz za $\dot{u}$ se dobije ovako:

$$\dot{u}_m = \frac{\partial u_m}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left[-\left(\frac{\alpha_m}{p}\right)^2\frac{\partial \Delta_m}{\partial x} - 2\left(\frac{\beta_m}{p}\right)^2\frac{\partial \omega_m}{\partial z}\right]$$

supstituirajući rješenja (3.1.3.) u tu relaciju dobivamo:

$$\dot{u}_m = \frac{\partial}{\partial t}\left\{-\left(\frac{\alpha_m}{p}\right)^2\frac{\partial}{\partial x}\, e^{i(pt-kx)}\left[\Delta_m' e^{-ikr_{\alpha m}z} + \Delta_m'' e^{ikr_{\alpha m}z}\right] -\right.$$

$$\left. - 2\left(\frac{\beta_m}{p}\right)^2\frac{\partial}{\partial z}\, e^{i(pt-kx)}\left[\omega_m' e^{-ikr_{\beta m}z} + \omega_m'' e^{ikr_{\beta m}z}\right]\right\}$$

Izrazimo li eksponencijalne funkcije trigonometrijskim funkcijama argumenata $kr_{\alpha m}z$ i $kr_{\beta m}z$ slijedi:

$$\dot{u}_m = -\left(\frac{\alpha_m}{p}\right)^2 pk\, e^{i(pt-kx)}\left[(\Delta_m' + \Delta_m'')\cos kr_{\alpha m}z - i\,(\Delta_m' - \Delta_m'')\sin kr_{\alpha m}z\right] -$$

$$- 2\left(\frac{\beta_m}{p}\right)^2 pk r_{\beta m}\, e^{i(pt-kx)}\left[(\omega_m' - \omega_m'')\cos kr_{\beta m}z - i\,(\omega_m' + \omega_m'')\sin kr_{\beta m}z\right] =$$

$$= -\frac{\alpha_m^2}{c}\, e^{i(pt-kx)}\left[(\Delta_m' + \Delta_m'')\cos kr_{\alpha m}z - i\,(\Delta_m' - \Delta_m'')\sin kr_{\alpha m}z\right] -$$

$$- 2\,\frac{\beta_m^2}{c}\, r_{\beta m}\, e^{i(pt-kx)}\left[(\omega_m' - \omega_m'')\cos kr_{\beta m}z - i\,(\omega_m' + \omega_m'')\sin kr_{\beta m}z\right]$$

Sada se izraz za $\dot{u}_m$ podijeli s c:

$$\frac{\dot{u}_m}{c} = \left\{ \left(\frac{\alpha_m}{c}\right)^2 \left[(\Delta_m' + \Delta_m'') \cos k r_{\alpha m} z - i (\Delta_m' - \Delta_m'') \sin k r_{\alpha m} z \right] - \right.$$

$$\left. - \gamma_m r_{\beta m} \left[(\omega_m' - \omega_m'') \cos k r_{\beta m} z - i (\omega_m' + \omega_m'') \sin k r_{\beta m} z \right] \right\} e^{i(pt-kx)} \qquad (3.1.5.)$$

Relaciju za $\dot{w}_m$ dobijemo na analogan način:

$$\dot{w}_m = \frac{\partial}{\partial t} \left[- \left(\frac{\alpha_m}{p}\right)^2 \frac{\partial \Delta_m}{\partial z} + 2 \left(\frac{\beta_m}{p}\right)^2 \frac{\partial \omega_m}{\partial x} \right] =$$

$$= - \left(\frac{\alpha_m}{p}\right)^2 p k r_{\alpha m} e^{i(pt-kx)} \left[-i (\Delta_m' + \Delta_m'') \sin k r_{\alpha m} z + \right.$$

$$\left. + (\Delta_m' - \Delta_m'') \cos k r_{\alpha m} z \right] + 2 \left(\frac{\beta_m}{p}\right)^2 p k e^{i(pt-kx)} \left[(\omega_m' + \omega_m'') \cos k r_{\beta m} z - \right.$$

$$\left. - i (\omega_m' - \omega_m'') \sin k r_{\beta m} z \right] =$$

$$= - \frac{\alpha_m^2}{c} e^{i(pt-kx)} r_{\alpha m} \left[-i (\Delta_m' + \Delta_m'') \sin k r_{\alpha m} z + (\Delta_m' - \Delta_m'') \cos k r_{\alpha m} z \right] +$$

$$+ 2 \frac{\beta_m^2}{c} e^{i(pt-kx)} \left[-i (\omega_m' - \omega_m'') \sin k r_{\beta m} z + (\omega_m' + \omega_m'') \cos k r_{\beta m} z \right]$$

Podijelimo li izraz s c dobijemo:

$$\frac{\dot{w}_m}{c} = \left\{ - \left(\frac{\alpha_m}{c}\right)^2 r_{\alpha m} \left[-i (\Delta_m' + \Delta_m'') \sin k r_{\alpha m} z + (\Delta_m' - \Delta_m'') \cos k r_{\alpha m} z \right] + \right.$$

$$\left. + 2 \gamma_m \left[-i (\omega_m' - \omega_m'') \sin k r_{\beta m} z + (\omega_m' + \omega_m'') \cos k r_{\beta m} z \right] \right\} e^{i(pt-kx)} \qquad (3.1.6.)$$

Normalna komponenta napetosti σ_m ima prema (3.1.4.) oblik:

$$\sigma_m = \rho_m \left\{ \alpha_m^2 \Delta_m' e^{i(pt-kx)} \cos k r_{\alpha m} z - i \alpha_m^2 \Delta_m' e^{i(pt-kx)} \sin k r_{\alpha m} z + \right.$$

$$+ \alpha_m^2 \Delta_m'' e^{i(pt-kx)} \cos k r_{\alpha m} z + i \Delta_m'' \alpha_m^2 e^{i(pt-kx)} \sin k r_{\alpha m} z +$$

$$+ 2\beta_m^2 \Big[-\left(\frac{\alpha_m}{p}\right)^2 k^2 e^{i(pt-kx)} (\Delta_m' \cos kr_{\alpha m} z - \Delta_m' i \sin kr_{\alpha m} z +$$

$$+ \Delta_m'' \cos kr_{\alpha m} z + i \Delta_m'' \sin kr_{\alpha m} z) + 2\left(\frac{\beta_m}{p}\right)^2 k^2 r_{\beta m} e^{i(pt-kx)} (-\omega_m' \cos kr_{\beta m} z +$$

$$+ i\omega_m' \sin kr_{\beta m} z + \omega_m'' \cos kr_{\beta m} z + i\omega_m'' \sin kr_{\beta m} z) \Big] \Big\},$$

odnosno:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_m = \Big\{ & -\rho_m \alpha_m^2 (\gamma_m - 1) \left[(\Delta_m' + \Delta_m'') \cos kr_{\alpha m} z - i(\Delta_m' - \Delta_m'') \sin kr_{\alpha m} z \right] - \\ & - \rho_m c^2 \gamma_m^2 r_{\beta m} \left[(\omega_m' - \omega_m'') \cos kr_{\beta m} z - i(\omega_m' + \omega_m'') \sin kr_{\beta m} z \right] \Big\} e^{i(pt-kx)} \end{aligned}\right\} \quad (3.1.7.)$$

Na isti način dobija se izraz za tangencijalnu komponentu napetosti:

$$\tau_m = -2\rho_m \beta_m^2 \frac{\alpha_m^2}{p^2} k^2 r_{\alpha m} e^{i(pt-kx)} \left[-(\Delta_m' - \Delta_m'') \cos kr_{\alpha m} z + i (\Delta_m' + \Delta_m'') \sin kr_{\alpha m} z \right] +$$

$$+ 2\rho_m \frac{\beta_m^4}{p^2} \left[-k^2 (1 - r_{\beta m}^2) \right] \left[(\omega_m' + \omega_m'') \cos kr_{\beta m} z - i(\omega_m' - \omega_m'') \sin kr_{\beta m} z \right] e^{i(pt-kx)}.$$

Izraz za $(1-r_{\beta m}^2)$ možemo pisati i kao $(2 - \frac{c^2}{\beta_m^2})$, što za τ_m daje:

$$\left.\begin{aligned} \tau_m = \Big\{ & \rho_m \alpha_m^2 r_{\alpha m} \gamma_m \left[-i(\Delta_m' + \Delta_m'') \sin kr_{\alpha m} z + (\Delta_m' - \Delta_m'') \cos kr_{\alpha m} z \right] - \\ & - \rho_m c^2 \gamma_m (\gamma_m - 1) \left[-i(\omega_m' - \omega_m'') \sin kr_{\beta m} z + (\omega_m' + \omega_m'') \cos kr_{\beta m} z \right] \Big\} \cdot e^{i(pt-kx)} \end{aligned}\right\} \quad (3.1.8.)$$

Time smo dobili izraze za četiri rubna uvjeta na graničnim plohama.
Postavimo nul-točku z-osi na (m-1)-u graničnu plohu (sl. 3.1.2.).

$$+ 2\beta_m^2 \Big[-\left(\frac{\alpha_m}{p}\right)^2 k^2 e^{i(pt-kx)}\left(\Delta_m' \cos kr_{\alpha m} z - \Delta_m' i \sin kr_{\alpha m} z \right. +$$

$$+ \left. \Delta_m'' \cos kr_{\alpha m} z + i\Delta_m'' \sin kr_{\alpha m} z\right) + 2\left(\frac{\beta_m}{p}\right)^2 k^2 r_{\beta m}\, e^{i(pt-kx)}\left(-\omega_m' \cos kr_{\beta m} z \right. +$$

$$+ \left. i\omega_m' \sin kr_{\beta m} z + \omega_m'' \cos kr_{\beta m} z + i\omega_m'' \sin kr_{\beta m} z\right)\Big]\Big\}\ ,$$

odnosno:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_m = \Big\{ & -\rho_m \alpha_m^2 (\gamma_m - 1)\left[(\Delta_m' + \Delta_m'')\cos kr_{\alpha m} z - i(\Delta_m' - \Delta_m'')\sin kr_{\alpha m} z\right] - \\ & -\rho_m c^2 \gamma_m^2 r_{\beta m}\left[(\omega_m' - \omega_m'')\cos kr_{\beta m} z - i(\omega_m' + \omega_m'')\sin kr_{\beta m} z\right]\Big\}\, e^{i(pt-kx)} \end{aligned}\right\} \quad (3.1.7.)$$

Na isti način dobija se izraz za tangencijalnu komponentu napetosti:

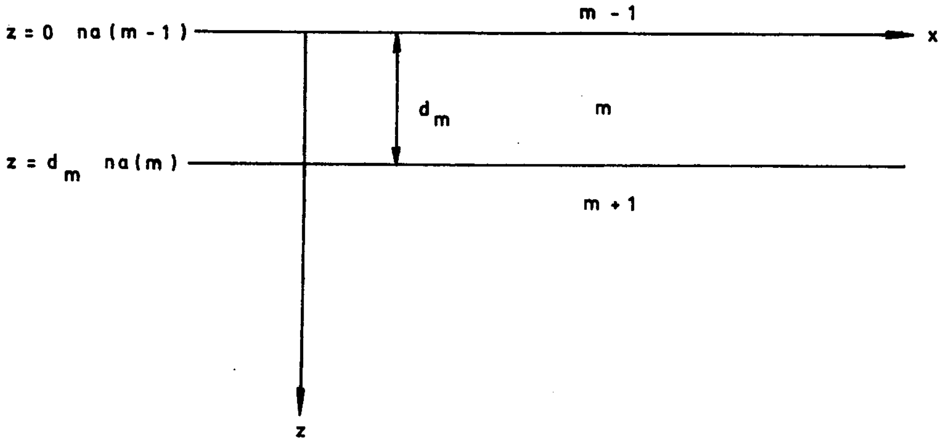
$$\tau_m = -2\rho_m \beta_m^2 \frac{\alpha_m^2}{p^2} k^2 r_{\alpha m}\, e^{i(pt-kx)}\left[-(\Delta_m' - \Delta_m'')\cos kr_{\alpha m} z + i(\Delta_m' + \Delta_m'')\sin kr_{\alpha m} z\right] +$$

$$+ 2\rho_m \frac{\beta_m^4}{p^2}\left[-k^2(1 - r_{\beta m}^2)\right]\left[(\omega_m' + \omega_m'')\cos kr_{\beta m} z - i(\omega_m' - \omega_m'')\sin kr_{\beta m} z\right] e^{i(pt-kx)} .$$

Izraz za $(1-r_{\beta m}^2)$ možemo pisati i kao $(2 - \frac{c^2}{\beta_m^2})$, što za τ_m daje:

$$\left.\begin{aligned} \tau_m = \Big\{ & \rho_m \alpha_m^2 r_{\alpha m} \gamma_m \left[-i(\Delta_m' + \Delta_m'')\sin kr_{\alpha m} z + (\Delta_m' - \Delta_m'')\cos kr_{\alpha m} z\right] - \\ & -\rho_m c^2 \gamma_m (\gamma_m - 1)\left[-i(\omega_m' - \omega_m'')\sin kr_{\beta m} z + (\omega_m' + \omega_m'')\cos kr_{\beta m} z\right]\Big\} \cdot e^{i(pt-kx)} \end{aligned}\right\} \quad (3.1.8.)$$

Time smo dobili izraze za četiri rubna uvjeta na graničnim plohama. Postavimo nul-točku z-osi na (m-1)-u graničnu plohu (sl. 3.1.2.).



Sl. 3.1.2.

Sada je $z = 0$ na plohi $m-1$, što znači da je $\sin(krz) = 0$, $\cos(krz) = 1$. Zato izraze $\overset{\dot{u}/c}{(3.1.5.)}$, $\overset{\dot{w}/c}{(3.1.6.)}$, $\overset{\sigma}{(3.1.7.)}$ i $\overset{\tau}{(3.1.8.)}$ možemo napisati u sažetijem obliku, te se linearna veza izmedju veličina $\dot{u}/c$, $\dot{w}/c$, σ i τ na toj plohi i amplituda $(\Delta'_m + \Delta''_m)$, $(\Delta'_m - \Delta''_m)$, $(\omega'_m - \omega''_m)$ i $(\omega'_m + \omega''_m)$, može prikazati na drugi način:

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_{m-1}/c \\ \dot{w}_{m-1}/c \\ \sigma_{m-1} \\ \tau_{m-1} \end{bmatrix} = E_m \begin{bmatrix} \Delta'_m + \Delta''_m \\ \Delta'_m - \Delta''_m \\ \omega'_m - \omega''_m \\ \omega'_m + \omega''_m \end{bmatrix} , \qquad (3.1.9.) \quad (1)$$

gdje je E_m matrica dobivena izravno iz sustava jednadžbi (3.1.5.) - (3.1.8.) i ima ovaj oblik:

$$E_m = \begin{bmatrix} -\left(\frac{\alpha_m}{c}\right)^2 & 0 & -\gamma_m \tau_{\beta m} & 0 \\ 0 & -\left(\frac{\alpha_m}{c}\right)^2 \tau_{\alpha m} & 0 & \gamma_m \\ -\rho_m \alpha_m^2(\gamma_m - 1) & 0 & -\rho_m c^2 \gamma_m^2 \tau_{\beta m} & 0 \\ 0 & \rho_m \alpha_m^2 \gamma_m \tau_{\alpha m} & 0 & -\rho_m c^2 \gamma_m(\gamma_m - 1) \end{bmatrix} . \qquad (3.1.10.)$$

za $\dot{u}/c$ – τ

Uvrstimo li $z = d_m$ u jednadžbe (3.1.5.) do (3.1.8.) dobijemo veličine $\dot{u}/c$, $\dot{w}/c$, σ i τ na m-toj plohi u ovisnosti o konstantama $\Delta_m' + \Delta_m''$, $\Delta_m' - \Delta_m''$, $\omega_m' - \omega_m''$, $\omega_m' + \omega_m''$. U tom slučaju vrijedi:

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_m/c \\ \dot{w}_m/c \\ \sigma_m \\ \tau_m \end{bmatrix} = D_m \begin{bmatrix} \Delta_m' + \Delta_m'' \\ \Delta_m' - \Delta_m'' \\ \omega_m' - \omega_m'' \\ \omega_m' + \omega_m'' \end{bmatrix} \quad (2) \qquad (3.1.11.)$$

Supstituiramo li $P_m = kr_{\alpha m} d_m$ i $Q_m = kr_{\beta m} d_m$, iz izraza (3.1.11.) slijedi da je D_m matrica oblika:

gdje je E_m matrica dobivena izravno iz sustava jednadžbi (3.1.5.) - (3.1.8.) i ima ovaj oblik:

$$E_m = \begin{bmatrix} -\left(\frac{\alpha_m}{c}\right)^2 & 0 & -\gamma_m \tau_{\beta m} & 0 \\ 0 & -\left(\frac{\alpha_m}{c}\right)^2 \tau_{\alpha m} & 0 & \gamma_m \\ -\rho_m \alpha_m^2 (\gamma_m - 1) & 0 & -\rho_m c^2 \gamma_m^2 \tau_{\beta m} & 0 \\ 0 & \rho_m \alpha_m^2 \gamma_m \tau_{\alpha m} & 0 & -\rho_m c^2 \gamma_m (\gamma_m - 1) \end{bmatrix}. \qquad (3.1.10.)$$

za $\dot{u}/c$ - τ

Uvrstimo li $z = d_m$ u jednadžbe (3.1.5.) do (3.1.8.) dobijemo veličine $\dot{u}/c$, $\dot{w}/c$, σ i τ na m-toj plohi u ovisnosti o konstantama $\Delta'_m + \Delta''_m$, $\Delta'_m - \Delta''_m$, $\omega'_m - \omega''_m$, $\omega'_m + \omega''_m$. U tom slučaju vrijedi:

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_m/c \\ \dot{w}_m/c \\ \sigma_m \\ \tau_m \end{bmatrix} = D_m \begin{bmatrix} \Delta'_m + \Delta''_m \\ \Delta'_m - \Delta''_m \\ \omega'_m - \omega''_m \\ \omega'_m + \omega''_m \end{bmatrix} \qquad (2) \qquad (3.1.11.)$$

Supstituiramo li $P_m = kr_{\alpha m} d_m$ i $Q_m = kr_{\beta m} d_m$, iz izraza (3.1.11.) slijedi da je D_m matrica oblika:

$$D_m = \tag{3.1.12.}$$

$$= \begin{bmatrix} -(\alpha_m/c)^2 \cos P_m & i(\alpha_m/c)^2 \sin P_m & -\gamma_m r_{\beta m} \cos Q_m & i\gamma_m r_{\beta m} \sin Q_m \\ i(\alpha_m/c)^2 r_{\alpha m} \sin P_m & -(\alpha_m/c)^2 r_{\alpha m} \cos P_m & -i\gamma_m \sin Q_m & \gamma_m \cos Q_m \\ -\rho_m \alpha_m^2 (\gamma_m - 1) \cos P_m & i\rho_m \alpha_m^2 (\gamma_m - 1) \sin P_m & -\rho_m c^2 \gamma_m^2 r_{\beta m} \cos Q_m & i\rho_m c^2 \gamma_m^2 r_{\beta m} \sin Q_m \\ -i\rho_m \alpha_m^2 \gamma_m r_{\alpha m} \sin P_m & \rho_m \alpha_m^2 \gamma_m r_{\alpha m} \cos P_m & i\rho_m c^2 \gamma_m (\gamma_m - 1) \sin Q_m & -\rho_m c^2 \gamma_m (\gamma_m - 1) \cos Q_m \end{bmatrix}.$$

Dakle, postoje četiri jednadžbe (3.1.9.) (1) i četiri jednadžbe (3.1.11.) (2) koje sadrže četiri nepoznanice: $(\Delta_m' + \Delta_m'')$, $(\Delta_m' - \Delta_m'')$, $(\omega_m' - \omega_m'')$, $(\omega_m' + \omega_m'')$. Eliminiranjem nepoznanice, odnosno matrice konstanti $(\Delta_m' + \Delta_m'')$, itd. dobijamo linearnu vezu izmedju $\dot{u}/c$, $\dot{w}/c$, σ i τ na vrhu i na dnu m-tog sredstva i možemo je izraziti jednadžbom:

ostaviti napisano na ploči

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_m/c \\ \dot{w}_m/c \\ \sigma_m \\ \tau_m \end{bmatrix} = D_m E_m^{-1} \begin{bmatrix} \dot{u}_{m-1}/c \\ \dot{w}_{m-1}/c \\ \sigma_{m-1} \\ \tau_{m-1} \end{bmatrix} \tag{3.1.13.}$$

(3)

E_m^{-1} je inverzna matrica matrice E_m ovog oblika:

$$
E_m^{-1} = \begin{bmatrix} -2(\beta_m/\alpha_m)^2 & 0 & (\rho_m \alpha_m^2)^{-1} & 0 \\ 0 & c^2(\gamma_m-1)/\alpha_m^2 \tau_{\alpha m} & 0 & (\rho_m \alpha_m^2 \tau_{\alpha m})^{-1} \\ (\gamma_m-1)/\gamma_m \tau_{\beta m} & 0 & -(\rho_m c^2 \gamma_m \tau_{\beta m})^{-1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & (\rho_m c^2 \gamma_m)^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.1.14.)
$$

Elementi produkta $D_m E_m^{-1} = a_m$ su:

$$
\begin{aligned}
(a_m)_{11} &= \gamma_m \cos P_m - (\gamma_m - 1)\cos Q_m \\
(a_m)_{12} &= i\left[(\gamma_m-1)\tau_{\alpha m}^{-1} \sin P_m + \gamma_m \tau_{\beta m} \sin Q_m\right] \\
(a_m)_{13} &= -(\rho_m c^2)^{-1}(\cos P_m - \cos Q_m) \\
(a_m)_{14} &= i(\rho_m c^2)^{-1}(\tau_{\alpha m}^{-1} \sin P_m + \tau_{\beta m} \sin Q_m) \\
(a_m)_{21} &= -i\left[\gamma_m \tau_{\alpha m} \sin P_m + (\gamma_m - 1)\tau_{\beta m}^{-1} \sin Q_m\right] \\
(a_m)_{22} &= -(\gamma_m - 1)\cos P_m + \gamma_m \cos Q_m \\
(a_m)_{23} &= i(\rho_m c^2)^{-1}(\tau_{\alpha m} \sin P_m + \tau_{\beta m}^{-1} \sin Q_m) \\
(a_m)_{24} &= (a_m)_{13} \\
(a_m)_{31} &= \rho_m c^2 \gamma_m (\gamma_m - 1)(\cos P_m - \cos Q_m) \\
(a_m)_{32} &= i\rho_m c^2\left[(\gamma_m-1)^2 \tau_{\alpha m}^{-1} \sin P_m + \gamma_m^2 \tau_{\beta m} \sin Q_m\right] \\
(a_m)_{33} &= (a_m)_{22} \\
(a_m)_{34} &= (a_m)_{12}
\end{aligned} \quad (3.1.15.)
$$

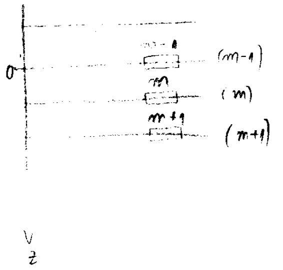
$$(a_m)_{41} = i\rho_m c^2 \left[\gamma_m^2 \, r_{\alpha m} \sin P_m + (\gamma_m - 1)^2 r_{\beta m}^{-1} \sin Q_m \right]$$

$$(a_m)_{42} = (a_m)_{31}$$

$$(a_m)_{43} = (a_m)_{21}$$

$$(a_m)_{44} = (a_m)_{11}$$

Da bi rubni uvjeti bili zadovoljeni nužno je da vrijednosti $\dot{u}/c$, $\dot{w}/c$, σ i τ na vrhu m-tog sloja budu jednake onima na dnu (m-1)-og sloja. Zamijenimo u (3.1.13.) m s m-1, slijedi:



$$\begin{bmatrix} \dot{u}_{m-1}/c \\ \dot{w}_{m-1}/c \\ \sigma_{m-1} \\ \tau_{m-1} \end{bmatrix} = a_{m-1} \begin{bmatrix} \dot{u}_{m-2}/c \\ \dot{w}_{m-2}/c \\ \sigma_{m-2} \\ \tau_{m-2} \end{bmatrix} \qquad (4)$$

Desnu stranu te jednadžbe možemo uvrstiti u relaciju (3.1.13.), čime se dobiva:

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_{m}/c \\ \dot{w}_{m}/c \\ \sigma_{m} \\ \tau_{m} \end{bmatrix} = a_m a_{m-1} \begin{bmatrix} \dot{u}_{m-2}/c \\ \dot{w}_{m-2}/c \\ \sigma_{m-2} \\ \tau_{m-2} \end{bmatrix} \qquad (5) \quad (3.1.16.)$$

Ponavljanjem ovog iterativnog postupka dobivamo:

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_{n-1}/c \\ \dot{w}_{n-1}/c \\ \sigma_{n-1} \\ \tau_{n-1} \end{bmatrix} = a_{n-1} a_{n-2} \cdots a_1 \begin{bmatrix} \dot{u}_0/c \\ \dot{w}_0/c \\ \sigma_0 \\ \tau_0 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} (6) \\ (3.1.17.) \end{matrix}$$

Kako za ~~n-tu plohu~~ n-ti sloj vrijedi:

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_n/c \\ \dot{w}_n/c \\ \sigma_n \\ \tau_n \end{bmatrix} = D_n \begin{bmatrix} \Delta'_n + \Delta''_n \\ \Delta'_n - \Delta''_n \\ \omega'_n - \omega''_n \\ \omega'_n + \omega''_n \end{bmatrix}$$

a za (n-1) ~~-u plohu~~ sloj:

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_{n-1}/c \\ \dot{w}_{n-1}/c \\ \sigma_{n-1} \\ \tau_{n-1} \end{bmatrix} = E_n \begin{bmatrix} \Delta'_n + \Delta''_n \\ \Delta'_n - \Delta''_n \\ \omega'_n - \omega''_n \\ \omega'_n + \omega''_n \end{bmatrix} ;$$

slijedi da je:

$$\begin{bmatrix} \Delta'_n + \Delta''_n \\ \Delta'_n - \Delta''_n \\ \omega'_n - \omega''_n \\ \omega'_n + \omega''_n \end{bmatrix} = E_n^{-1} \begin{bmatrix} \dot{u}_{n-1}/c \\ \dot{w}_{n-1}/c \\ \sigma_{n-1} \\ \tau_{n-1} \end{bmatrix} , \qquad \begin{matrix} (7) \\ (3.1.18.) \end{matrix}$$

(6)

odnosno, prema (3.1.17.):

$$\begin{bmatrix} \Delta_n' + \Delta_n'' \\ \Delta_n' - \Delta_n'' \\ \omega_n' - \omega_n'' \\ \omega_n' + \omega_n'' \end{bmatrix} = E_n^{-1} a_{n-1} a_{n-2} \cdots a_1 \begin{bmatrix} \dot{u}_0/c \\ \dot{w}_0/c \\ \sigma_0 \\ \tau_0 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} \text{7a} \\ (3.1.19.) \end{matrix}$$

Jednadžba (3.1.19.) vrijedi općenito i za prostorne i za površinske valove u slojevitom sredstvu. Medjutim, nas zanima slučaj površinskih valova, a to znači da:

a) nema napetosti na slobodnoj površini (što je uvijek slučaj)

$$\sigma_0 = \tau_0 = 0$$

b) amplitude valova opadaju s dubinom u poluprostoru, tako da je

$$\Delta_n'' = \omega_n'' = 0$$

Označimo s J matrični produkt:

$$J = E_n^{-1} a_{n-1} a_{n-2} \cdots a_1,$$

jednadžba (3.1.19.) (7a) poprima jednostavniji oblik:

$$\begin{bmatrix} \Delta_n' \\ \Delta_n' \\ \omega_n' \\ \omega_n' \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \dot{u}_0/c \\ \dot{w}_0/c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{matrix} * \\ (3.1.20.) \end{matrix}$$

odnosno:

$$
\begin{bmatrix} \Delta'_n \\ \Delta'_m \\ \omega'_n \\ \omega'_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} & J_{14} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} & J_{24} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} & J_{34} \\ J_{41} & J_{42} & J_{43} & J_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_0/c \\ \dot{w}_0/c \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (3.1.21.)
$$

ili eksplicitno napisana:

$$
\begin{aligned}
\Delta'_n &= J_{11}\frac{\dot{u}_0}{c} + J_{12}\frac{\dot{w}_0}{c} \\
\Delta'_m &= J_{21}\frac{\dot{u}_0}{c} + J_{22}\frac{\dot{w}_0}{c} \\
\omega'_n &= J_{31}\frac{\dot{u}_0}{c} + J_{32}\frac{\dot{w}_0}{c} \\
\omega'_m &= J_{41}\frac{\dot{u}_0}{c} + J_{42}\frac{\dot{w}_0}{c} \quad .
\end{aligned} \qquad (3.1.22.)
$$

Budući da su Δ'_n, ω'_n, te J_{ij} funkcije jedino fazne brzine c i valnog broja k možemo izjednačiti desne strane prve i druge, odnosno treće i četvrte jednadžbe u (3.1.22.), te se dobije:

(8)

$$
\frac{\dot{u}_0}{\dot{w}_0} = \frac{J_{22} - J_{12}}{J_{11} - J_{21}} = \frac{J_{42} - J_{32}}{J_{31} - J_{41}} \qquad (3.1.23.)
$$

Jednadžba (3.(8)1.23.) implicitno izražava vezu izmedju fazne brzine c i valnog broja k i predstavlja u stvari jednadžbu disperzije fazne brzine Rayleighevih valova. Već i formalno se vidi korist matričnog računa, jer je jednadžbu disperzije moguće napisati u jednostavnom i sažetom obliku za bilo koji broj slojeva.

3.2. Općenita svojstva rješenja jednadžbe disperzije

za

Stavimo da je:

$A = a_{n-1}a_{n-2} \cdots a_1$, gdje je a_i matrica i-tog sloja.

A je u tom slučaju kvadratna matrica četvrtog reda i izgleda ovako:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \tag{3.2.1.}$$

Tada matrica J ima oblik:

$$J = E_n^{-1} A \tag{3.2.2.}$$

ili:

$$
= \left[\begin{array}{lll}
-2\left(\frac{\beta_n}{\alpha_n}\right)^2 A_{11} + \frac{1}{\rho_n \alpha_n^2} A_{31} & -2\left(\frac{\beta_n}{\alpha_n}\right)^2 A_{12} + \frac{1}{\rho_n \alpha_n^2} A_{32} & \cdot\cdot \\[2ex]
\frac{c^2(\gamma_n - 1)}{\alpha_n^2 \tau_{\alpha n}} A_{21} + \frac{1}{\rho_n \alpha_n^2 \tau_{\alpha n}} A_{41} & \frac{c^2(\gamma_n - 1)}{\alpha_n^2 \tau_{\alpha n}} A_{22} + \frac{1}{\rho_n \alpha_n^2 \tau_{\alpha n}} A_{42} & \cdot\cdot \\[2ex]
\frac{\gamma_n - 1}{\gamma_n \tau_{\beta n}} A_{11} - \frac{1}{\rho_n c^2 \gamma_n \tau_{\beta n}} A_{31} & \frac{\gamma_n - 1}{\gamma_n \tau_{\beta n}} A_{12} - \frac{1}{\rho_n c^2 \gamma_n \tau_{\beta n}} A_{32} & \cdot\cdot \\[2ex]
A_{21} + \frac{1}{\rho_n c^2 \gamma_n} A_{41} & A_{22} + \frac{1}{\rho_n c^2 \gamma_n} A_{42} & \cdot\cdot
\end{array} \right.
$$

$$
\left. \begin{array}{ll}
-2\left(\frac{\beta_n}{\alpha_n}\right)^2 A_{13} + \frac{1}{\rho_n \alpha_n^2} A_{33} & -2\left(\frac{\beta_n}{\alpha_n}\right)^2 A_{14} + \frac{1}{\rho_n \alpha_n^2} A_{34} \\[2ex]
\frac{c^2(\gamma_n - 1)}{\alpha_n^2 \tau_{\alpha n}} A_{23} + \frac{1}{\rho_n \alpha_n^2 \tau_{\alpha n}} A_{43} & \frac{c^2(\gamma_n - 1)}{\alpha_n^2 \tau_{\alpha n}} A_{24} + \frac{1}{\rho_n \alpha_n^2 \tau_{\alpha n}} A_{44} \\[2ex]
\frac{\gamma_n - 1}{\gamma_n \tau_{\beta n}} A_{13} - \frac{1}{\rho_n c^2 \gamma_n \tau_{\beta n}} A_{33} & \frac{\gamma_n - 1}{\gamma_n \tau_{\beta n}} A_{14} - \frac{1}{\rho_n c^2 \gamma_n \tau_{\beta n}} A_{34} \\[2ex]
A_{23} + \frac{1}{\rho_n c^2 \gamma_n} A_{43} & A_{24} + \frac{1}{\rho_n c^2 \gamma_n} A_{44}
\end{array} \right] \qquad (3.2.2a.)
$$

Tada je:

$$J_{12} - J_{22} = -2\left(\frac{\beta_n}{\alpha_n}\right)^2 A_{12} + \frac{1}{\rho_n \alpha_n^2} A_{32} - \frac{c^2(\gamma_n - 1)}{\alpha_n^2 \tau_{\alpha n}} A_{22} - \frac{1}{\rho_n \alpha_n^2 \tau_{\alpha n}} A_{42} .$$

Pomnožimo izraz sa $\left(-\tau_{\alpha n} \frac{\alpha_n^2}{c^2}\right)$:

$$-\tau_{\alpha n} \frac{\alpha_n^2}{c^2}(J_{12} - J_{22}) = \gamma_n \tau_{\alpha n} A_{12} + (\gamma_n - 1) A_{22} - \tau_{\alpha n} A_{32} / \rho_n c^2 + A_{42} / \rho_n c^2 .$$

Neka je $J_{12} - J_{22} = K$,

odnosno:

$$\left(-\tau_{\alpha u} \frac{\alpha_u^2}{c^2}\right) K = \gamma_n \tau_{\alpha n} A_{12} + (\gamma_n - 1) A_{22} - \tau_{\alpha n} A_{32} / \rho_n c^2 + A_{42} / \rho_n c^2 .$$

Na sličan način dobiju se i:

$$L = J_{11} - J_{21}$$

$$\left(-\tau_{\alpha u} \frac{\alpha_u^2}{c^2}\right) L = \gamma_n \tau_{\alpha n} A_{11} + (\gamma_n - 1) A_{21} - \tau_{\alpha n} A_{31} / \rho_n c^2 + A_{41} / \rho_n c^2$$

$$M = J_{32} - J_{42}$$

(3.2.3.)

$$\left(-\tau_{\beta u} \frac{b_u^2}{c^2}\right) M = -(\gamma_n - 1) A_{12} + \gamma_n \tau_{\beta n} A_{22} + A_{32} / \rho_n c^2 + \tau_{\beta n} A_{42} / \rho_n c^2$$

$$N = J_{31} - J_{41}$$

$$\left(-\tau_{\beta u} \frac{b_u^2}{c^2}\right) N = -(\gamma_n - 1) A_{11} + \gamma_n \tau_{\beta n} A_{21} + A_{31} / \rho_n c^2 + \tau_{\beta n} A_{41} / \rho_n c^2$$

Jednadžba (3.1.23.) se može pisati u formalno još kraćem obliku:

$$\frac{\dot{u}_0}{\dot{w}_0} = \frac{J_{22} - J_{12}}{J_{11} - J_{21}} = \frac{J_{42} - J_{32}}{J_{31} - J_{41}}$$

$$-\frac{\dot{u}_0}{\dot{w}_0} = \frac{K}{L} = \frac{M}{N}$$

Veličine K, L, M, i N sadrže u sebi elemente matrice A, a to znači da sadrže i elemente matrica a_j (j= 1,..., n) /(3.1.15.)/. Ako označimo realne vrijednosti s R, a imaginarne s I, svaka od matrica a_j može se pisati u obliku:

$$a_j = \begin{bmatrix} R & I & R & I \\ I & R & I & R \\ R & I & R & I \\ I & R & I & R \end{bmatrix} \qquad (3.2.4.)$$

što proizlazi iz toga da se veličine $\sin P_m$, $\sin Q_m$, $r_{\alpha m}$, $r_{\beta m}$, koje oviseći o faznoj brzini c, mogu biti ili realne ili imaginarne, pojavljuju u kombinacijama $r_{\alpha m}^{\pm 1} \sin P_m$ i $r_{\beta m}^{\pm 1} \sin Q_m$. Kako je $\sin P_m$ realno ili imaginarno u skladu s $r_{\alpha m}$, a i $\sin Q_m$ je u istom odnosu s $r_{\beta m}$, ova dva produkta su uvijek realna za realne vrijednosti c.

Produkt bilo koje dvije takve matrice je matrica istog oblika, tj. s realnim i imaginarnim elementima na istim mjestima (to se može lako pokazati prema zakonu o množenju matrica). Sve to prema tome vrijedi i za matricu A koja se dobije množenjem matrica oblika (3.2.4.). To znači da su:

A_{11}, A_{22}, A_{31}, A_{42} realni;
A_{12}, A_{21}, A_{32}, A_{41} imaginarni.

Ovi elementi matrice A su jedini interesantni, jer samo oni ulaze u relacije za K, L, M, N (3.1.26.). Radi ilustracije navedenoga promotrimo npr. izraz za K:

$$K = \gamma_n \tau_{\alpha n} A_{12} + (\gamma_n - 1) A_{22} - \tau_{\alpha n} A_{32}/\rho_n c^2 + A_{42}/\rho_n c^2$$

lako vidimo da je:

γ_n realno,

$r_{\alpha n}$ imaginarno (promatramo slučaj površinskih valova, $c < \alpha_n$, tj. amplitude iščezavaju za velike pozitivne z),

A_{12}, A_{32} imaginarni,

A_{22}, A_{42} realni,

te je K realna veličina. Slično tome, vidimo da je N ~~realan~~, dok su L i M ~~imaginarni~~, pa je omjer $\dot{u}_o/\dot{w}_o$ uvijek imaginaran, što znači da fazna razlika izmedju horizontalne i vertikalne komponente pomaka na slobodnoj površini sloja iznosi 90^o. Prema tome, na slobodnoj površini čestice homogenog sredstva pri prolazu Rayleighevih valova osciliraju eliptički oko položaja ravnoteže. Fazna razlika može biti oba predznaka što je vidljivo iz:

$$\frac{\dot{u}_o}{\dot{w}_o} = \pm iB = Be^{\pm i\pi/2}$$

pa se već prema tome čestice slobodne površine mogu gibati direktno ili retrogradno.

3. Metoda matrice rasprostiranja

3.1 Uvod

Ukoliko se iznad poluprostora nalazi više od tri sloja, periodsku je jednadžbu nemoguće eksplicitno napisati, pogotovo za Rayleigheve valove. Zato se upotrebljava matrični postupak koji je u seizmologiju uveo Thomson 1950. godine. Njegov postupak je korigirao Haskell 1953., pa se metoda naziva Thomson-Haskellovom. Ona je zapravo posebni slučaj općenitog postupka koji rabi tzv. matrice rasprostiranja (koji su razvili Gilbert i Backus, 1966. godine). Pomoću tog postupka određuju se svojstvene vrijednosti vektora pomaka i napetosti. Drugim riječima, tom se metodom problem rasprostiranja površinskih valova (određivanje jednadžbe disperzije) svodi na problem određivanja svojstvenih funkcija površinskih valova.

Praktičnu primjenu metode matrice rasprostiranja omogućila su računala, koja su tek početkom 1970-tih godina postala dovoljna brza za takav račun. Još i danas račun svojstvenih funkcija (rješenja jednadžbe gibanja) za realne modele traje vrlo dugo. Taj ćemo postupak (s matricama rasprostiranja) upoznati na jednostavnijem slučaju Loveovih valova.

Polazimo od rješavanja problema svojstvenih vrijednosti vektora pomaka i napetosti.
Sve ravne valove u slojevitom sredstvu možemo razmatrati pomoću jednadžbe (a što ćemo u daljnjem dokazati)

$$\frac{d\vec{f}}{dz} = \mathbf{A}\vec{f} \tag{1}$$

gdje je $\vec{f}$ vektor koji prikazuje ovisnost pomaka i napetosti o dubini, A je konstantna matrica koja ovisi o fizikalnim svojstvima homogenog sredstva i horizontalnoj komponenti vektora sporosti te frekvenciji ω.

Kod ravnog SH vala razmatramo y-komponentu pomaka:

$u_y = v = v(x, z, t)$,

a ovisnost o x i t opisana je faktorom rasprostiranja $e^{i(kx-\omega t)}$.

Jednadžba gibanja (u slučaju da djeluju jedino sile elastičke deformacije) glasi

$$\rho\ddot{v} = \tau_{yz,z} + \tau_{yx,x} , \tag{2}$$

gdje su

$$\tau_{yz} = \mu \frac{dv}{dz},$$

$$\tau_{yx} = \mu \frac{dv}{dx}.$$

Slijedi da SH val možemo razmatrati pomoću komponenti vektora $\vec{f}$ danoga s:

$$\vec{f}(z)e^{i(kx-\omega t)} = \begin{pmatrix} v \\ \tau_{yz} \end{pmatrix},$$

a ovisnost $\vec{f}$ o dubini dobije se rješavanjem jednadžbe (1) s matricom koeficijenata

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \mu^{-1} \\ \mu k^2 - \omega^2 \rho & 0 \end{pmatrix}$$ (vidi dolje!).

Promatramo ravne valove u vertikalno heterogenom sredstvu (izotropnom, elastičnom) s konstantama elastičnosti koje su proizvoljne funkcije dubine z:

$$\lambda = \lambda(z),\ \ \mu = \mu(z),\ \ \rho = \rho(z).$$

Neka se ravni površinski valovi rasprostiru u smjeru osi x. Za Loveove valove pretpostavimo rješenje jednadžbe gibanja oblika

$$u = 0$$
$$v = l_1(k, z, \omega)e^{i(kx-\omega t)}$$
$$w = 0$$

(l_1 je amplituda pomaka).

Komponente napetosti pridružene gornjem pomaku su:

$$\tau_{xx} = 0$$
$$\tau_{yy} = 0$$
$$\tau_{zz} = 0$$
$$\tau_{zx} = 0$$
$$\tau_{yz} = \left(\mu \frac{dv}{dz}\right) = \left(\mu \frac{dl_1}{dz}\right)e^{i(kx-\omega t)}$$
$$\tau_{xy} = \left(\mu \frac{dv}{dx}\right) = ik\mu l_1 e^{i(kx-\omega t)}$$

Uvrstimo li izraze za pomak i komponente napetosti u jednadžbu gibanja (2) dobivamo:

$$-\rho(z)l_1\omega^2 = \frac{d}{dz}\left[\mu(z)\frac{dl_1}{dz}\right] - k^2\mu(z)l_1 \qquad (3)$$

Relacija (3) je jednadžba gibanja za $l_1(k, z, \omega)$.

Ta jednadžba gibanja vrijedi u sredstvu bez izvora energije, ili u vrlo velikoj udaljenosti od njega (valne fronte su dovoljno velike da se mogu smatrati ravnim plohama) i nema volumne sile. Pomak i napetost moraju biti neprekinuti na svakoj plohi diskontinuiteta konstanti elastičnosti, inače bi ti diskontinuiteti pomaka i napetosti djelovali kao seizmički izvor. U razmatranom sredstvu granične plohe su uvijek horizontalne tako da za Loveove valove komponenta τ_{yz} napetosti mora biti neprekinuta.

Neka τ_{yz} ima ovaj oblik:

$$\tau_{yz} = l_2(k,z,\omega)e^{i(kx-\omega t)}$$

$l_2(k,z,\omega)$ predstavlja amplitudu (komponente) napetosti i jednaka je $\mu \dfrac{dl_1}{dz}$.

$$\tau_{yz} = \mu(z)\frac{dl_1}{dz}e^{i(kx-\omega t)} = l_2 e^{i(kx-\omega t)}$$

$$l_2 = \mu(z)\frac{dl_1}{dz} \Rightarrow \frac{dl_1}{dz} = \frac{l_2}{\mu(z)} \tag{3a}$$

Uvrstimo jednadžbu (3a) u jednadžbu gibanja (3).

$$-\rho(z)l_1\omega^2 = \frac{dl_2}{dz} - k^2\mu(z)l_1,$$

odnosno

$$\frac{dl_2}{dz} = k^2\mu(z)l_1 - \rho(z)l_1\omega^2,$$

tj.

$$\frac{dl_2}{dz} = \left[kH2\mu(z) - \omega^2\rho(z)\right]l_1 \tag{3b}$$

Ove dvije obične diferencijalne jednadžbe prvog reda (3a) i (3b):

$$\frac{dl_1}{dz} = \frac{l_2}{\mu(z)}$$

$$\frac{dl_2}{dz} = \left[k^2\mu(z) - \omega^2\rho(z)\right]l_1$$

možemo napisati u matričnom obliku

$$\frac{d}{dz}\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\mu(z) \\ k^2\mu(z) - \omega^2\rho(z) & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Ako matricu $\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix}$ zamijenimo s $\vec{f}$, a $\begin{pmatrix} 0 & 1/\mu(z) \\ k^2\mu(z)-\omega^2\rho(z) & 0 \end{pmatrix}$ s **A** dobijemo diferencijalnu jednadžbu za pomak i napetost

$$\frac{d\vec{f}(z)}{dz} = \mathbf{A}(z)\vec{f}(z).$$

Time smo dokazali da jednadžba (1) vrijedi za razmatrani problem. Matrice ne sadrže prostorne gradijente parametara sredstva, iako su λ, μ i ρ funkcije dubine.

Rubni uvjeti za površinske valove su da pomak trne k nuli za velike dubine, te da nema napetosti na slobodnoj površini ($z = 0$):

$l_1 \to 0$ za $z \to \infty$,

$l_2 = 0$ za $z = 0$.

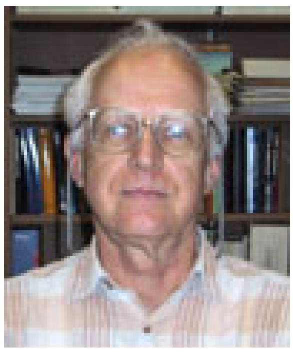
Za danu frekvenciju ω i za navedene rubne uvjete netrivijalno rješenje postoji jedino za $k = k_n(\omega)$, kao što je već pokazano za Loveove valove u sloju iznad poluprostora. Ovdje je $k_n(\omega)$ svojstvena vrijednost, a $\vec{u}_n(z)$ svojstvena funkcija. Fazna brzina Loveovih valova dana je izrazom $\omega / k_n(\omega)$, a rješenje jednadžbe (4) daje ovisnost određenog moda o dubini.

Postoji više načina na koji se može riješiti problem svojstvenih vrijednosti i svojstvenih vektora (npr. metoda numeričke integracije i metoda matrice rasprostiranja). U daljnjem ćemo se osvrnuti na metodu matrice rasprostiranja.

3.2 Metoda matrice rasprostiranja

Tu su metodu u seizmologiju uveli F. Gilbert i G. Backus koji su 1966. godine. predložili metodu za rješavanje diferencijalne jednadžbe (1). Thomson-Haskellova metoda je posebni slučaj metode matrice rasprostiranja.

Freeman Gilbert



George Backus

Vratimo se diferencijalnoj jednadžbi za vektor pomaka i napetosti

$$\frac{d\vec{f}(z)}{dz} = \mathbf{A}(z)\vec{f}(z), \tag{5}$$

koju sada generaliziramo na matrični oblik, gdje je **A** kvadratna matrica čiji su elementi funkcije dubine *z*, fazne brzine *c* i frekvencije ω.

$\vec{f}(z)$ je oblika $n \times 1$

A*(z)* je oblika $n \times n$

(*n* poprima vrijednost 2 za Loveove valove, a 4 za Rayleigheve valove.)

Sredstvo u kojem se valovi rasprostiru je slojevito s konstantnim parametrima u svakom sloju:

z_0 ———————————— $f_1(z_0)$

$P_1(z)$ $\alpha_1, \beta_1, \rho_1$

z_{i-1} ------------------------------------

$P_i(z_i)$ $\alpha_i, \beta_i, \rho_i$ $z_i - z_{i-1} = H_i$

z_i ------------------------------------

$P_n(z_n)$

z_n ———————————— $f_n(z_n)$

$\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}, \rho_{n+1}$

Po definiciji matrica rasprostiranja (*engl.* propagator-matrix ili matrizant) je niz:

$$P(z, z_0) = I + \int_{z_0}^{z} \mathbf{A}(\zeta_1) d\zeta_1 + \int_{z_0}^{z} \mathbf{A}(\zeta_1) \int_{z_0}^{\zeta_1} \mathbf{A}(\zeta_2) d\zeta_2 d\zeta_1 + ...$$

gdje je *I* jedinična matrica reda *n*, tj. u slučaju Loveovih valova $n = 2$ (*n* je broj komponenti pomaka i napetosti).

Za bilo koji z_0 jednadžba (5) ima jedinstveni matrizant od z_0 koji ćemo označiti s $P(z, z_0)$.

Matrice $P(z, z_0)$ i $P(z, z_1)\ P(z_1, z_0)$ su obje rješenja jednadžbe (5) i jednake su kada je $z = z_1$.

Zato teorem jedinstvenosti osigurava njihovu jednakost za svaki *z*. Stoga možemo uvrstiti *P* umjesto *f* u diferencijalnu jednadžbu (5):

$$\frac{dP(z,z_0)}{dz} = A(z)P(z,z_0).$$

Iz definicije matrice *P* slijedi

$$P(z_0,z_0) = I.$$

Na taj način dobivamo najvažnije svojstvo matrice rasprostiranja:

$$\vec{f}(z) = P(z,z_0)\vec{f}(z_0)$$

Drugim riječima, ako poznajemo vektor pomaka i napetosti $\vec{f}(z)$ na površini sredstva $(z = z_0)$, a z_0, z_1, z_2 označavaju granice slojeva, $\vec{f}(z)$ na dnu drugog sloja dobivamo množenjem matrica slojeva iznad tog nivoa s $\vec{f}(z_0)$. Dakle, $P(z,z_0)$ daje vektor gibanja i napetosti $\vec{f}(z)$ na nekoj dubini *z* ako su poznate vrijednosti *f* na površini z_0.

Drugo značajno svojstvo matrice $P(z,z_0)$ – *ulančanost* – može se pokazati na sljedeći način. Primijetimo da je

$$\begin{aligned}\vec{f}(z_2) &= P(z_2,z_1)\vec{f}(z_1) = \\ &= P(z_2,z_1)\underbrace{P(z_1,z_0)\vec{f}(z_0)}_{\vec{f}(z_1)}\end{aligned}$$

Stavimo li $z_2 = z_0$ slijedi

$$I = P(z_0,z_1)P(z_1,z_0),$$

što znači da je $P(z_0,z_1)$ inverz matrice $P(z_1,z_0)$. Drugim riječima za bilo koji *z*, $P(z,z_0)$ ima inverznu matricu.

Nadalje, moramo izračunati matrice slojeva. Kako je slojevito sredstvo takvo da je **A** unutar sloja konstantno, definicijski izraz za *P* postaje mnogo jednostavniji. Tu se ne radi o ograničenju, jer sloj može biti po volji tanak.

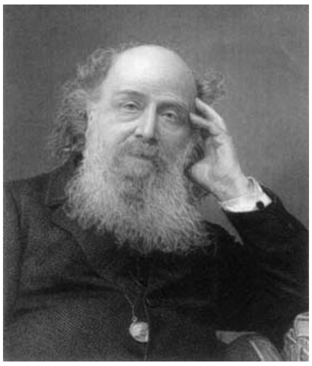
Dakle, matrizant ima oblik:

$$P(z,z_0) = I + (z-z_0)\mathbf{A} + \frac{1}{2}(z-z_0)^2\mathbf{AA} + ... = e^{(z-z_0)\mathbf{A}}$$

Funkciju matrice računamo prema Sylvesterovoj formuli:

$$F(\mathbf{A}) = \sum_{k=1}^{n} F(\lambda_k)\frac{\prod_{r\neq k}(\mathbf{A}-\lambda_r I)}{\prod_{r\neq k}(\lambda_k-\lambda_r)} \qquad (6)$$

(Za Loveove valove *n* = 2, *k* = 1,2; *r* = 1 za *k* = 2; *r* = 2 za *k* = 1)



James Joseph Sylvester, 1814.–1897.

*F(***A***)*je bilo koja funkcija matrice. *n* je red matrice **A**. $\lambda_k\,(k=1,2,...n)$ su svojstvene vrijednosti matrice **A** i određuju se iz jednadžbe:

$$|\mathbf{A}-\lambda I|=0 \tag{7}$$

Kako je za Loveove valove

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & \mu^{-1} \\ k^2\mu-\omega^2\rho & 0 \end{pmatrix}$$

jednadžba (7) poprima ovaj oblik:

$$|\mathbf{A}-\lambda I|=\begin{vmatrix} -\lambda & \mu^{-1} \\ k^2\mu-\omega^2\rho & -\lambda \end{vmatrix}=0\,,$$

te dobijemo

$$\lambda=\pm\sqrt{k^2-\frac{\omega^2}{\beta^2}}=\pm\nu$$

$$\lambda_1=\nu$$

$$\lambda_2=-\nu.$$

Uvrstimo li ta rješenja u Sylvesterovu formulu (6) dobijemo:

$$P(z,z_0)=e^{(z-z_0)\mathbf{A}}=\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\nu(z-z_0) & \dfrac{\operatorname{sh}\nu(z-z_0)}{\mu\nu} \\ \nu\mu\operatorname{sh}\nu(z-z_0) & \operatorname{ch}\nu(z-z_0) \end{pmatrix}$$

***Zadatak*:** Izvedi funkciju $e^{(z-z_0)\mathbf{A}}$ pomoću formule (6)!

Prisjetimo se vektora gibanja i napetosti

$$\vec{f}(z)=P(z-z_0)\vec{f}(z_0)\,.$$

Prema toj definiciji matrica $P(z-z_0)$ daje ovisnost amplituda pomaka i napetosti $\vec{l}(z)$ s dubinom ako su poznate na vrhu sloja $z=z_0$ (z i z_0 moraju biti u istom sloju!).

Za slojevito sredstvo, tj. za $z_k > z > z_{k-1}$

$$\vec{f}(z) = P(z, z_{k-1})P(z_{k-1}, z_{k-2})\cdots P(z_1, z_0)\vec{f}(z_0)$$

Primijenili smo svojstvo ulančanosti na $\vec{f}$ i prikazali ga umnoškom matrica slojeva, koji možemo napisati kao $P(z, z_0)$. Tada je

$$\vec{f}(z) = P(z, z_0)\vec{f}(z_0),$$

gdje je

$$P(z, z_0) = e^{(z - z_{k-1})\mathbf{A}_k} \prod_{l=1}^{k-1} e^{(z_l - z_{l-1})\mathbf{A}_l} . \tag{7a}$$

Zamijenimo li $\vec{f}$ s $\begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix}$ dobijemo:

$$\begin{pmatrix} l_1(z) \\ l_2(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1(0) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11} \cdot l_1(0) \\ P_{21} \cdot l_1(0) \end{pmatrix} \tag{8}$$

Jednadžba (8) daje vertikalni profil pomaka i napetosti, odnosno svojstvene funkcije Loveovih valova za različite periode. Funkcije $l_1(z)$ i $l_2(z)$ su svojstvene funkcije Loveovog vala. (Rayleighev val ima četiri svojstvene funkcije).

Na $z = 0$:

$$l_2(0) = 0 = P_{21} \cdot l_1(0) .$$

Kako pomak $l_1(0)$ na slobodnoj površini nije ograničen ostaje

$$P_{21} = 0 \tag{9}$$

što je odredbena jednadžba za horizontalni valni broj k_n za zadanu frekvenciju ω, te je time omogućeno određivanje disperzije fazne brzine, jer je $c_n = \omega / k_n$.

Valja znati da se metoda matrice rasprostiranja može upotrijebiti i za rješavanje diferencijalne jednadžbe (1) ako u njoj postoji doprinos od izvora.

Da bismo našli rješenje jednadžbe (9) za dani ω račun započnemo s probnom vrijednošću valnog broja *k*. Za poznate vrijednosti od ω i *k* izračunamo iznos P_{21} množenjem matrica slojeva (uz upotrebu parametara slojeva). Zatim neznatno promijenimo vrijednost *k* i gledamo promjenu P_{21}. Služeći se ekstrapolacijom i interpolacijom tražimo nultočku, P_{21} = 0. Jednom kada nađemo svojstvenu vrijednost, svojstvena se funkcija izračunava pomoću (7a).

4. Lateralna nehomogenost

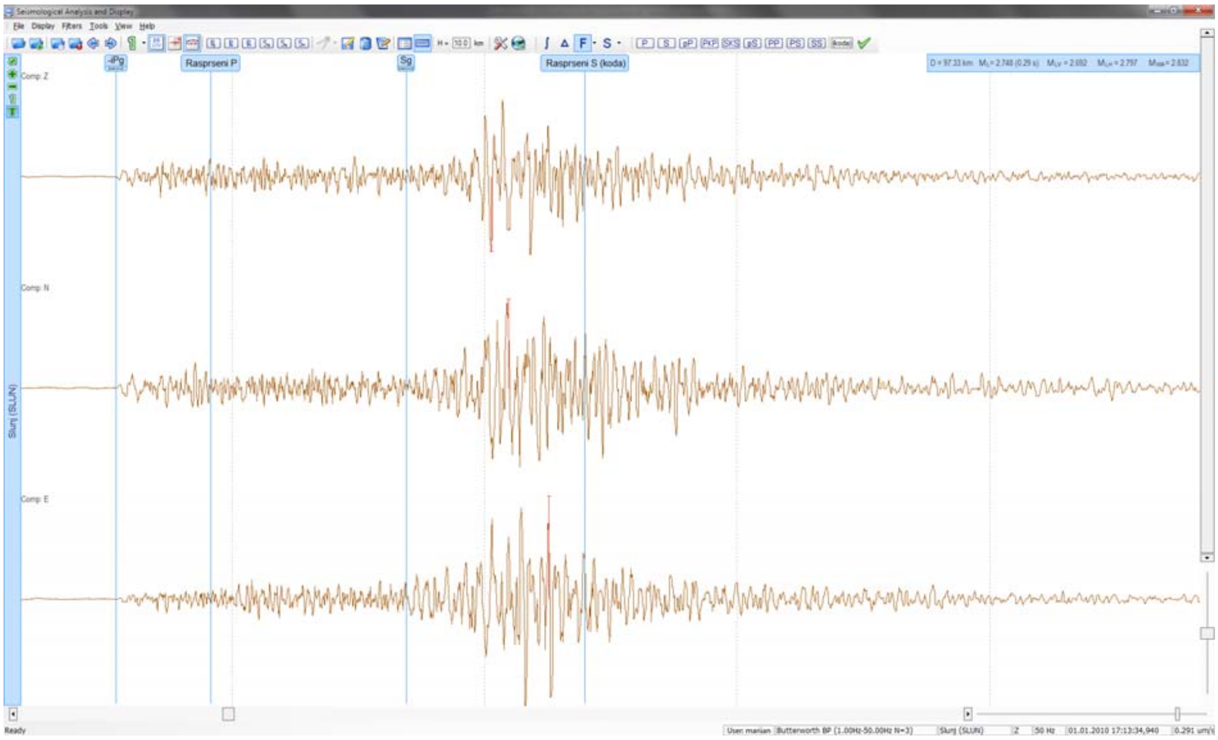
4.1. Uvod

Do sada je razmatrano rasprostiranje prostornih i površinskih valova u sredstvu u kojem elastičke konstante variraju jedino po dubini ili s udaljenošću od središta Zemlje.

Pokazalo se da se pomoću takvog klasičnog modela Zemlje s lateralnom homogenošću ne može zadovoljavajuće objasniti neka novija seizmološka opažanja, poput toga da u nekoj lokalnoj seizmografskoj mreži amplitude i nastupna vremena teleseizmičkih longitudinalnih valova pokazuju jaku fluktuaciju. Ovo se opažanje objašnjava raspršenjem elastičkih valova.

Ako pogledamo geološku kartu vidjet ćemo da je Zemlja jako lateralno nehomogena, pa je donekle začuđujuće da se većinu opažanja moglo zadovoljavajuće objasniti upotrebom lateralno homogenih modela. To bi se moglo objasniti pretpostavkom da je vertikalna nehomogenost izraženija od horizontalne. Postoji puno načina postupanja s lateralnom nehomogenosti. Jedan od načina je metoda perturbacije, koja se koristi ako se radi o slaboj nehomogenosti. Druge metode su numeričke, poput metode konačnih razlika i metode konačnih elemenata. Inače, nehomogenost ovisi o redu veličine dimenzija (a) nehomogenosti, valnoj duljini (λ) i linearnoj dimenziji (L) nehomogenog područja. Problem nehomogenosti postaje to složeniji što je linearna dimenzija L nehomogenog područja veća u odnosu na veličine λ i a. Što su omjeri L/a i L/λ veći to je problem teže riješiti deterministički, te se okrećemo statističkom pristupu.

Kako izgleda seizmogram lokalnih potresa? On se grubo gledano sastoji od dva dijela: primarnih valova i raspršenih valova. Primarni valovi su longitudinalni (P) i transverzalni (S). Kada ne bi bilo nehomogenosti oni bi jedini bili na seizmogramu.



Potres kod Zagreba, zapisan na seizmološkoj postaji Slunj

(epicentralna udaljenost 97 km, M = 2.7)

Raspršeni valovi nastaju interakcijom primarnih valova i nehomogenosti u sredstvu. Sredstvo u kojem postoji lateralna nehomogenost naziva se perturbirano, a bez lateralne nehomogenosti – neperturbirano sredstvo. Pretpostavimo li da je nehomogenost u promatranom sredstvu slabo izražena, raspršene valove možemo opisati valnim jednadžbama za neperturbirano sredstvo uz dodatak članova koji nastaju međudjelovanjem nehomogenosti i primarnih valova.

4.2. Klasifikacija problema raspršenja

Raspršenje klasificiramo prema dva najvažnija bezdimenzijska broja koji kontroliraju njegovu pojavu: *ka* i *kL*.

$ka = 2\pi a / \lambda$, predstavlja mjeru glatkoće ili grubosti nehomogenosti umutar valne duljine.

$kL = 2\pi L / \lambda$ ili drugim riječima = 2π puta broj valnih duljina primarnih valova u nehomogenom području. U seizmologiji vrijednost od *kL* varira od 1 do 10^4.

I veličina nehomogenosti može značajno varirati, od zrna veličine kristala do razdiobe oceana i kontinenata. Stoga *ka* u seizmologiji može poprimiti skoro bilo koju vrijednost. Ipak, valja znati da se efekti raspršenja mogu zanemariti kako za vrlo velike tako i za vrlo male vrijednosti od *ka*. Da bi to pojasnili poslužit ćemo se tzv. valnim parametrom *D*.

$D = 4L/ka^2$.

Malena vrijednost od *D* znači da je nehomogenost toliko glatka da se područje može smatrati homogenim dio po dio. Npr. cijelu Zemlju podijelimo na nekoliko područja unutar kojih pretpostavljamo da je struktura kore i plašta homogena. Tada se npr. opaženo vrijeme putovanja površinskog vala može interpretirati kao suma vremena putovanja u svakom području.

U drugu ruku – ako *D* ima vrlo veliku vrijednost, raspršenje se može zanemariti kada je veličina nehomogenosti mnogo manja od valne duljine. U tom se slučaju sredstvo ponaša homogeno s nekim prosječnim svojstvima.

Problem raspršenja postaje vrlo složen kada je $1 < k < 10$. U tom slučaju valovi prevaljuju veliku udaljenost u sredstvu u kojem je veličina nehomogenosti usporediva s valnom duljinom. Tada se javljaju tzv. koda valovi lokalnih potresa – polagano trnjenje gibanja s frekvencijama u intervalu od približno 1–50 Hz i trajanjem 100-1000 oscilacija. Imaju jednostavno svojstvo da je na određenoj frekvenciji vremenski pad amplitude oscilacija skoro neovisan o epicentralnoj udaljenosti, položaju stanice i naravi putanje direktnog vala (između hipocentra i postaje). Takav bi slučaj bilo teško deterministički opisati te se stoga služimo statističkim metodama, zasnovanim ili na raspršenju unatrag od brojnih raspršivača (*engl. scatterers*) ili na difuzuji raspršene energije. Difuzijom se objašnjavaju npr. lunarni seizmogrami.

Raspršenje je posebno značajno u kontinentalnoj kori, jer se ona sastoji od tankih slojeva i reflektora koji su rezultat evolucije kontinenata. Za kratke valne duljine oni mogu djelovati kao raspršivači ili Huygensovi izvori.

4.3 Postojanje perturbacija u svojstvima sredstva

U daljnjem ćemo razmatrati što se događa kada slojevito sredstvo postane lateralno nehomogeno. Nehomogenost može potjecati od promjene u debljini sloja ili od promjene brzina seizmičkih valova i gustoće u svakom sloju. Model koji ćemo koristiti je 2-D, a svojstva sredstva i valna polja su funkcije od *x* i *z* (*z* je dubina) (znači postoje perturbacije u sredstvu). Vremensku ovisnost opisuje član $e^{i(kx-wt)}$. Prema tome relaciju za pomak možemo napisati kao

$$u_i = f(z)e^{i(kx-\omega t)}$$

Jednadžbe gibanja za *u, v,* i *w* su oblika:

$$-\rho\omega^2 u = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}$$
$$-\rho\omega^2 v = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}$$
$$-\rho\omega^2 w = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}$$

Pretpostavimo li da je sredstvo izotropno, tada nam relacija za napetost i deformaciju daje sljedeće jednadžbe:

$$\tau_{xx} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\tau_{xz} = \mu(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x})$$

$$\partial v$$

$$\tau_{yz} = \mu \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$\tau_{zz} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x}$$

Iz prethodnih osam jednadžbi eliminiramo τ_{xx} i τ_{xy} i uredimo preostale jednadžbe tako da derivacije po *z* budu na lijevoj strani. Preostalih šest jednadžbi ima sljedeći oblik:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x}(\lambda \frac{\partial w}{\partial z}) = -\frac{\partial}{\partial x}((\lambda + 2\mu)\frac{\partial u}{\partial x}) - \rho\omega u \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} = -\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} - \rho\omega w \qquad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{\lambda + 2\mu}\tau_{zz} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\frac{\partial u}{\partial x} \qquad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{\mu}\tau_{xz} - \frac{\partial w}{\partial x} \qquad (4)$$

$$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial x}(\mu \frac{\partial v}{\partial x}) - \rho\omega^2 v \qquad (5)$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{\mu}\tau_{yz}, \qquad (6)$$

gdje su *u, v, w* komponente pomaka, τ_{ij} je tenzor napetosti, λ i μ su Lameove konstante, a ρ je gustoća sredstva. Možemo uočiti da su jednadžbe (1–6) podijeljene u dvije odvojene grupe. Jednadžbe (1–4) su pridružene P-SV valu, a (5–6) SH valu.

Sustav jednadžbi (1–4) može se napisati u obliku:

$$\frac{\partial}{\partial z}\begin{pmatrix} u \\ w \\ \tau_{xz} \\ \tau_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \partial_x & \frac{1}{\mu} & 0 \\ -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\partial_x & 0 & 0 & \frac{1}{\lambda+2\mu} \\ -(\partial_x\zeta)\partial_x - \zeta\partial_{xx} - \rho\omega^2 & 0 & 0 & -\partial_x(\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}) - \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\partial_x \\ 0 & -\rho\omega^2 & -\partial_x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ w \\ \tau_{xz} \\ \tau_{zz} \end{pmatrix} \qquad (7)$$

gdje su

$$\zeta = \frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}$$

$$\partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\partial_{xx} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Za SH val vrijedi:

$$\frac{\partial}{\partial z}\begin{pmatrix} v \\ \tau_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\mu} \\ -(\partial_x\mu)\partial_x - \mu\partial_{xx} - \rho\omega^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v \\ \tau_{yz} \end{pmatrix}$$

(8)

Pretpostavljamo da je i nehomogenost i valno polje neovisno o *y*.

Da rezimiramo, napisali smo jednadžbe gibanja za *u*, *v*, *w* , kao i jednadžbe za komponente napetosti i dobili 8 jednadžbi iz kojih smo eliminirali τ_{xx} i τ_{xy}. Te smo jednadžbe preuredili tako da derivacije po *z* budu uvijek na lijevoj strani jednadžbi. Nakon toga napisana su jednadžbe za komponente pomaka i komponenete napetosti pomoću matrica. Sada ćemo separirati prostornu razdiobu svojstava sredstva na primarni dio (koji ovisi jedino o dubini *z*) i perturbaciju koja ovisi o *x* i *z*.

Tako npr. perturbaciju gustoće možemo napisati kao

$$\Delta\rho(x,z) = \rho(x,z) - \rho_0(z),$$

gdje je $\Delta\rho(x,z)$ perturbacija gustoće, a indeks 0 odnosi se na primarni dio.

Nadalje

$$\Delta\left(\frac{1}{\mu(x,z)}\right) = \frac{1}{\mu(x,z)} - \frac{1}{\mu_0(z)}, \quad \text{itd.}$$

Tada jednadžbe (7) i (8) možemo napisati u sljedećem obliku:

$$\frac{\partial}{\partial z}\vec{f}(x,z) = A_0(z)\vec{f}(x,z) + A_1(x,z)\vec{f}(x,z),$$

gdje je $\vec{f}(x,z)$ vektor koji gibanje i napetosti s komponentama $\left(u, w, \tau_{xz}, \tau_{zz}\right)^T$ za slučaj P-SV vala, i $\left(v, \tau_{yz}\right)^T$ za slučaj SH vala. Veličina $A_0(z)$ predstavlja samo vertikalnu nehomogenost, dok $A_1(x,z)$ predstavlja i horizontalnu i vertikalnu nehomogenost.

Drugim riječima, $A_0(z)$ prikazujemo matricom za lateralno homogeno sredstvo i za P-SV val ona je oblika:

$$A_0(z) = \begin{pmatrix} 0 & \partial_x & \dfrac{1}{\mu_0} & 0 \\ -\dfrac{\lambda_0}{\lambda_0 + 2\mu_0}\partial_x & 0 & 0 & \dfrac{1}{\lambda_0 + 2\mu_0} \\ -\zeta_0\partial_{xx} - \rho_0\omega^2 & 0 & 0 & -\dfrac{\lambda_0}{\lambda_0 + 2\mu_0}\partial_x \\ 0 & -\rho_0\omega^2 & -\partial_x & 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

Za SH val ima oblik:

$$A_0(z) = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{\mu_0} \\ -\mu_0\partial_{xx} - \rho_0\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

Matrica $A_1(x,z)$ sadrži efekte lateralne nehomogenosti. Za P-SV val ona se dobije oduzimanjem jednadžbe (9) od (7):

$$A_1(x,z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \Delta\dfrac{1}{\mu} & 0 \\ -\Delta\left(\dfrac{\lambda}{\lambda+2\mu}\right)\partial_x & 0 & 0 & \Delta\left(\dfrac{1}{\lambda+2\mu}\right) \\ -(\partial_x\Delta\zeta)\partial_x - \Delta\zeta\partial_{xx} - \Delta\rho\omega^2 & 0 & 0 & -\partial_x\Delta\left(\dfrac{\lambda}{\lambda+2\mu}\right) - \Delta\left(\dfrac{\lambda}{\lambda+2\mu}\right)\partial_x \\ 0 & \Delta\rho\omega^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(11)

Za SH val matrica $A_1(x,z)$ ima oblik:

$$A_1(x,z) = \begin{pmatrix} 0 & \Delta\left(\dfrac{1}{\mu}\right) \\ -(\partial_x\Delta\mu)\partial_x - \Delta\mu\partial_{xx} - \Delta\rho\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \tag{12}$$

Već smo vidjeli da jednadžbe (7) i (8) možemo napisati u obliku

$$\frac{\partial}{\partial z}\vec{f}(x,z) = A_0(z)\vec{f}(x,z) + A_1(x,z)\vec{f}(x,z) \tag{13}$$

gdje je $\vec{f}(x,z)$ vektor pomaka i napetosti, $A_0(z)$ je matrični operator koji se odnosi na lateralno homogeno sredstvo s gustoćom ρ_0, brzinama $\alpha_0(z), \beta_0(z)$ i neovisan je o x. Utjecaji lateralne nehomogenosti opisani su matričnim operatorom $A_1(x,z)$ koji se odnosi na mjere nehomogenosti $a_i(x,z)$.

Kao što je poznato x-ovisnost valnog polja u lateralno homogenom sredstvu može se separirati pomoću faktora e^{ikx}. Proizvoljno valno polje može se konstruirati pomoću integrala po horizontalnom valnom broju k. Čak i u slučaju lateralne nehomogenosti pojam valnog broja je koristan. Napišimo Fourierov transform od $\vec{f}(x,z)$ i $A_1(x,z)$ po x (da bismo prešli u domenu valnog broja):

$$A_1(k,z) = \int_{-\infty}^{\infty\infty} A_1(x,z)e^{-ikx}dx$$

$$\vec{f}(k,z) = \int_{-\infty}^{\infty\infty} \vec{f}(x,z)e^{-ikx}dx$$

Tada Fourierov transform jednadžbe (13) glasi:

$$\frac{\delta}{\delta z}\vec{f}(k,z) = A_0(z)\vec{f}(k,z) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} A_1(k-k',z)\vec{f}(k',z)dk' \tag{14}$$

∂_x i ∂_{xx} će u relaciji za $A_0(z)$ biti zamijenjeni s (ik), odnosno ($-k^2$). Rješenje jednadžbe (14) možemo napisati pomoću matrice propagatora.

Sjetimo se jednadžbe gibanja (i zaboravimo na trenutak, radi lakšeg izvođenja, da je sredstvo lateralno nehomogeno):

$$\frac{d}{dz}\vec{f}(z) = A(z)\vec{f}(z)$$

u lateralno homogenom sredstvu

$$\frac{d}{dz}f(z) = A(z)f(z)$$

Rješenje mora zadovoljavati početni uvjet $f(z_0) = f_0$. Rješenje je oblika

$f(z) = P(z, z_0)f(z_0)$ ($P(z, z_0)$ je matrica propagator).

Uvrstimo li sada rješenje u polaznu jednadžbu gibanja, dobijemo:

$$\frac{dP(z, z_0)}{dz} = A(z)P(z, z_0).$$

Prema definiciji propagatora znamo da vrijedi svojstvo ulančanosti

$$P(z, z')P(z', z_0) = P(z, z_0),$$

kao i da vrijedi $P^{-1}(z, z_0) = P(z_0, z)$.

Upotrebom matrice propagatora, za dane početne uvjete za *f,* možemo riješiti nehomogeni niz jednadžbi:

$\frac{df(z)}{dz} = a(z)f(z') + g(z)$ (*g(z)* je npr. član od izvora),

Pomnožimo prethodnu jednadžbu s $P^{-1}(z, z_0)$:

$$P^{-1}(z,z_0)\frac{df(z)}{dz}-P^{-1}(z,z_0)A(z)f(z)=P^{-1}(z,z_0)g(z)$$
$$P(z_0,z)\frac{df(z)}{dz}-P(z_0,z)A(z)f(z)=P(z_0,z)g(z)$$
$$P(z_0,z)\frac{df(z)}{dz}-f(z)\frac{dP(z_0,z)}{dz}=P(z_0,z)g(z)$$

Dalje možemo pisati

$$\frac{d}{dz}\left[P(z_0,z)f(z)\right]=P(z_0,z)g(z).$$

Gornju jednadžbu integriramo po z i primijenimo svojstvo ulančanosti

$$f(z)=P^{-1}(z_0,z)\left[\int_{z_0}^{z}P^{-1}(z',z_0)g(z')dz'+f(z_0)\right] \tag{15}$$

$$f(z)=P(z,z_0)\left[\int_{z_0}^{z}P(z_0,z')g(z')dz'+f(z_0)\right]$$

$[\,P(z,z_0)P(z_0,z')=P(z,z')\,]$

Rješenje jednadžbe (14) može se napisati pomoću $P(z,z_0)$, a prema analogiji s (15):

$$\vec{f}(k,z)=P(z,z_0)\vec{f}(k,z_0)+\frac{1}{2\pi}\int_{z_0}^{z}P(z,z')dz'\int_{-\infty}^{\infty}A_1(k-k',z)\vec{f}(k',z')dk'. \tag{16}$$

Očigledno, rješenje daje korektan početni uvjet za $z=z_0$.

Rješenje (16) sastoji se od dva dijela. Prvi se odnosi na lateralno homogeno sredstvo, a drugi dio predstavlja doprinos lateralne nehomogenosti. Tj. integral

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\vec{A}_1(k-k',z)\vec{f}(k',z)dk' , \tag{17}$$

predstavlja doprinos elemenata nehomogenosti (to su sve mali izvori) u jediničnom intervalu dubina. Veličina k' predstavlja valne brojeve ulaznog valnog polja.

Razlikujemo dva slučaja.

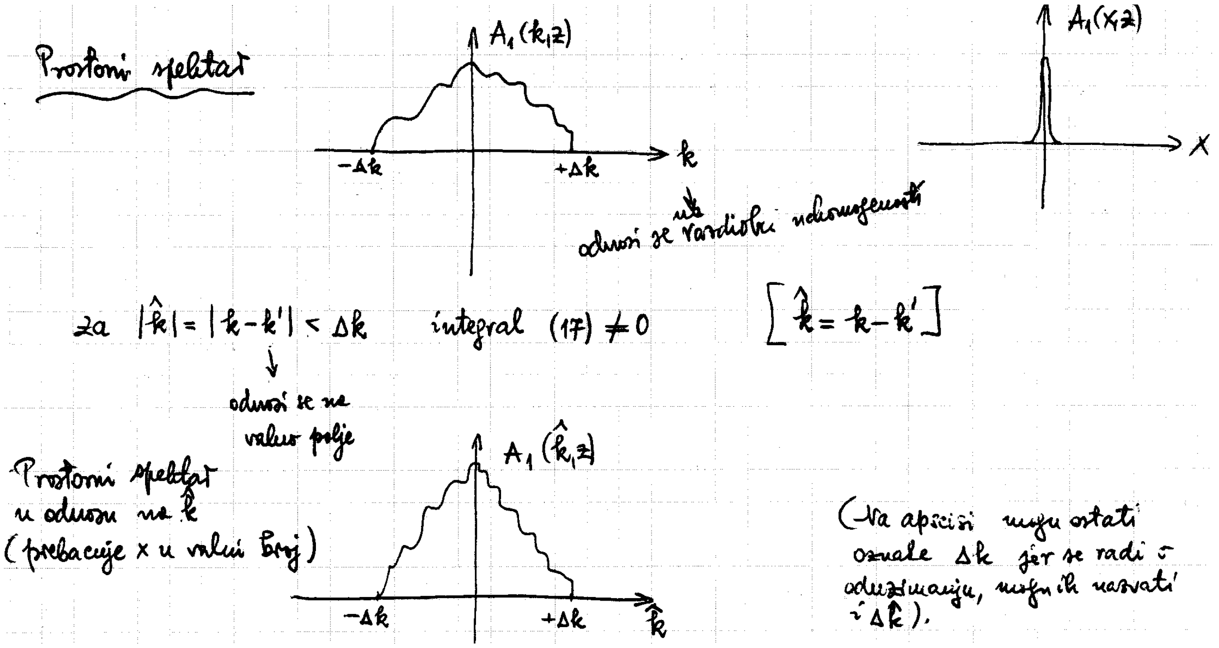
1. slučaj

$\vec{A}_1(k,z)$ je slično δ funkciji (znači jako lokalizirana oko k = 0), tj. $\vec{A}_1(k-k',z) \neq 0$ jedino za $k \approx k'$, tada će konverzija među valnim brojevima biti zanemariva, tj. integral postoji jedino za $k \approx k'$. Kako je $\vec{A}_1(k,z)$ slično δ funkciji, inverzni Fourierov transform biti će približno konstantan, te je $\vec{A}_1(x,z)$ sporo promjenljiva funkcija od x. U tom slučaju ulazno valno polje izlazi iz sredstva praktički bez konverzije valnih brojeva i nema raspršenja unatrag. To ne znači da uopće nema raspršenja, nego da će sve nehomogenosti (izvori) generirati raspršeno valno polje koncentrirano u smjeru ulaznog vala, ali samo za valove s $k \approx k'$.

2. slučaj

Pogledajmo sada što se događa kada se $\vec{A}_1(x,z)$ brzo mijenja.

Razdiobu nehomogenih elemenata na plohi $z = z_0$ (=konst.) može se predočiti varijacijom npr. indeksa loma i prikazati kao neravnu površinu s visinama „valova“ $A(x,y,z=z_0)$ s prostornim spektrom $A_1(k_x,k_y,z=z_0)$. Ako $A_1(x,z)$ brzo varira, dakle nehomogenosti su relativno male, tada će spektar $A_1(k,z)$ biti širok, a ne koncentriran oko k = 0.



Znači, ako je $\hat{k}$ između (-Δk) i +(Δk), integral $(17) \neq 0$. Sada je moguće da k i k' budu različitih predznaka i tih je mogućnosti to više što je spektar širi. $k < 0$ znači rasprostiranje vala u negativnom smjeru osi x, dakle radi se o valovima raspršenima unatrag.

Dakle, nehomogenosti koje su male u odnosu na valnu duljinu uzrokuju jako raspršenje unatrag. Kod nehomogenih elemenata velikih dimenzija bit će dominantno raspršenje prema naprijed, bez konverzije valnog broja.

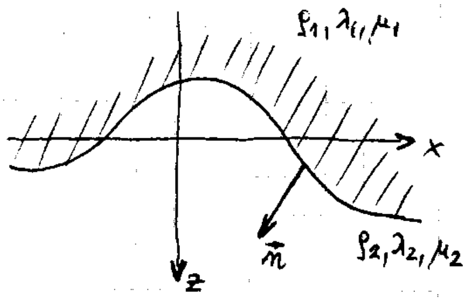
Jasno je da će male nehomogenosti uzrokovati raspršenje i u svim ostalim smjerovima, što je vidljivo ako se razmotre valni brojevi u vektorskoj notaciji, dakle po komponentama.

Integralna jednadžba (16) može se riješiti iterativnim postupkom ako je $\vec{A}_1$ u određenom smislu dovoljno manji od $\vec{A}_0$ da bi se osigurala konvergencija iterativnog procesa. Prvo postavimo da je $\vec{A}_1 = 0$ i odredimo rješenje nultog reda rješavanjem problema za lateralno homogeno neporemećeno sredstvo. To rješenje konvoluiramo s $\vec{A}_1(k,z)$ i stavimo u zadnji član jednadžbe (16). Rješrenje prvog reda dobijemo množenjem matrice propagatora i integriranjem po dubini. Postupak se ponavlja dok rješenje ne iskonvergira. Rješenja 1. reda mogu se eksplicitno dobiti jedino za P-SV val u modelu u kojem je neporemećeno sredstvo homogeni poluprostor, dok za SH val neporemećeno sredstvo mora biti najmanje jedan sloj iznad poluprostora.

4.4 *Utjecaj nepravilnih graničnih struktura*

Kada se diskontinuiteti u svojstvima sredstva javljaju jedino duž horizontalne granične plohe vektor pomaka i napetosti $\vec{f}(u, v, w, \tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{zz})$ kontinuiran je pri prolazu kroz tu plohu.

Promotrimo što se zbiva kada granična ploha nije ravna već nepravilnog oblika. I ovdje ćemo pretpostaviti da niti valno polje niti svojstva sredstva ne ovise o *y*. Dubinu nepravilne granične plohe izrazimo kao $z = h(x)$ i neka fluktuira (koleba se) oko $z = 0$ i odvaja dva homogena sredstva sa svojstvima ρ_1, λ_1, μ_1 i ρ_2, λ_2, μ_2.



Slika 1

Sada uvjet o kontinuiranom pomaku (kinematički rubni uvjet) mora biti postavljen na $z = h(x)$, jer je to granica između dva sredstva.
Isto je i s dinamičkim rubnim uvjetom. S $\vec{n}$ označimo jediničnu normalu na graničnu plohu (kao na slici 1). Komponente te normale su n_x i n_z . U tom slučaju razmatramo ove komponente napetosti:

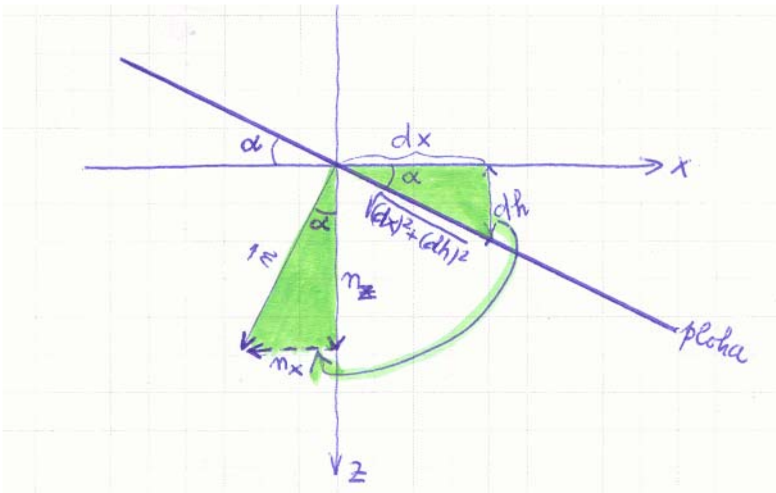
$$\tau_{nx} = \tau_{xx} n_x + \tau_{zx} n_z$$
$$\tau_{nz} = \tau_{xz} n_x + \tau_{zz} n_z$$
$$\tau_{ny} = \tau_{xy} n_x + \tau_{zy} n_z$$

i one moraju biti neprekinute na plohi $z = h(x)$. Uočimo da treba odrediti n_x i n_z. Poslužit ćemo se slikom 2. Sa slike je vidljivo da je nagib plohe određen kutem α, a njega možemo odrediti pomoću *dx* i *dh*.

Prema definiciji normale na plohu:

$$\vec{n} = n_x \cdot \vec{i} + n_z \cdot \vec{k}$$
$$n_x = \sin\alpha \cdot |\vec{n}|$$
$$n_z = \cos\alpha \cdot |\vec{n}|$$

Dva zelena trokuta (slika 2) sukladna su, te je po analogiji *dh* iz desnog trokuta na mjestu n_x, a *dx* iz desnog tokuta na mjestu n_z.



Slika 2

Tada je

$$\left.\begin{aligned} n_z &= \frac{dx}{\sqrt{(dx)^2 + (dh)^2}} \\ n_x &= -\frac{dh}{\sqrt{(dx)^2 + (dh)^2}} \end{aligned}\right/ : dx$$

Gornje izraze možemo napisati i kao:

$$n_z = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dh}{dx}\right)^2}}$$
$$n_x = -\frac{\frac{dh}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dh}{dx}\right)^2}}$$

Uvedemo supstituciju $h' = dh/dx$. Onda je

$$n_z = \frac{1}{\sqrt{1+(h')^2}}$$

$$n_x = \frac{-h'}{\sqrt{1+(h')^2}}.$$

(Negativni predznak je zbog usmjerenosti n_x u negativnom smjeru x-osi.)

Izrazi za komponente napetosti su oblika:

$$\tau_{xx} = (\lambda + 2\mu)\frac{\delta u}{\delta x} + \lambda \frac{\delta w}{\delta z}$$

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\delta v}{\delta x}$$

$$\tau_{xz} = \mu\left(\frac{\delta u}{\delta z} + \frac{\delta w}{\delta x}\right)$$

$$\tau_{yz} = \mu \frac{\delta v}{\delta z}$$

$$\tau_{zz} = (\lambda + 2\mu)\frac{\delta w}{\delta z} + \lambda \frac{\delta u}{\delta x}.$$

Rubni uvjeti koji se odnose na plohu $z = h(x)$ su:

$$u_1 = u_2$$

$$w_1 = w_2$$

$$\tau_{nx_1} = \tau_{nx_2}$$

$$\tau_{nz_1} = \tau_{nz_2}.$$

Komponentu napetosti τ_{nx} možemo napisati kao

$$\tau_{nx} = \underbrace{\left[(\lambda + 2\mu)\frac{\delta u}{\delta x} + \lambda \frac{\delta w}{\delta xz}\right]}_{\tau_{xx}} \cdot \underbrace{\left(\frac{-h'}{\sqrt{1+(h')^2}}\right)}_{n_x} + \tau_{zx} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+(h')^2}}}_{n_z}$$

Odnosno, možemo je napisati u obliku:

$$\left(\sqrt{1+(h')^2}\right)\tau_{nx} = \frac{-4\mu h'(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu}\frac{\delta u}{\delta x} + \tau_{zx} - \frac{\lambda h'}{\lambda + 2\mu}\tau_{zz}$$

Zadatak: Izvesti izraz za komponentu napetosti τ_{nx}**.**

τ_{nz} ostaje u istom općenitom obliku:

$$\tau_{nz} = \tau_{xz} \underbrace{\frac{-h'}{\sqrt{1+(h')^2}}}_{n_x} + \tau_{zz} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+(h')^2}}}_{n_z}$$

Odnosno:

$$\sqrt{1+(h')^2}\,\tau_{nz} = -h'\tau_{xz} + \tau_{zz}$$

Prema tome, rubne uvjete možemo napisati kao:

za P-SV valove

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ \sqrt{1+(h')^2}\,\tau_{nx} \\ \sqrt{1+(h')^2}\,\tau_{nz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{-4\mu h'(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\partial_x & 0 & 1 & \dfrac{-\lambda h'}{\lambda+2\mu} \\ 0 & 0 & -h' & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ \tau_{zx} \\ \tau_{zz} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

gdje je $\partial_x = \dfrac{\partial}{\partial x}$.

Za SH valove rubni uvjeti su oblika:

$$\begin{pmatrix} v \\ \sqrt{1+(h')^2}\,\tau_{ny} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mu h'\partial x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ \tau_{zy} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Jednadžbe (1) i (2) napišemo u vektorskom obliku:

$\vec{g} = \vec{Q}\,\vec{f}$,

a $\vec{Q}$ možemo napisati kao

$\vec{Q} = \vec{I} + h'\vec{Q}_1$.

Za P-SV val:

$$\vec{Q}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{-4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\partial_x & 0 & 0 & \dfrac{-\lambda}{\lambda+2\mu} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Za SH val:

$$\vec{Q}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\mu\partial_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Upotrijebimo li gornje indekse (1) i (2) da označimo sredstva, rubni uvjet može se izraziti kao:

$$\left(\vec{I} = h'\vec{Q}_1^{(1)}\right)\vec{f}^{(1)}(x,h(x)) = \left(\vec{I} + h'\vec{Q}_1^{(2)}\right)\vec{f}^{(2)}(x,h(x)) \qquad (3)$$

($\vec{f}$ je vektor pomaka i napetosti.)

Pretpostavimo li da je fluktuacija (kolebanje) granične plohe malena, onda $\vec{f}(x,h(x))$ možemo aproksimirati Taylorovim redom:

$$\vec{f}(x,h(x)) - \vec{f}(x,0) \sim \left(\frac{\partial\vec{f}}{\partial z}\right)_{z=0} h(x) = A_0\left(0\right)f(x,0)h(x)$$

Tada iz jednadžbe (3) izostavljanjem članova višeg reda od *h* i *h*', dobivamo:

$$\left(\vec{I} + h'\vec{Q}_1^{(1)} + h\vec{A}_0^{(1)}\right)\vec{f}^{(1)}(x,0) = \left(\vec{I} + h'\vec{Q}_1^{(2)} + h\vec{A}_0^{(2)}\right)\vec{f}^{(2)}(x,0) \qquad (4)$$

Znamo da je u slučaju horizontalne granične plohe $\vec{f}$ (vektor gibanja i napetosti) kontinuiran na plohi $z = 0$, tj. $\vec{f}^{(1)}(x,0) = \vec{f}^{(2)}(x,0)$. Međutim, ovdje razmatrana granična ploha nepravilnog je oblika što znači da je $\vec{f}$ diskontinuiran na $z = 0$. Diskontinuiranost je dana s:

$$\vec{f}^{(2)}(x,0) - \vec{f}^{(1)}(x,0) = \left(h'\vec{Q}_1^{(2)} + h\vec{A}_0^{(2)}\right)\vec{f}^{(2)}(x,0) - \left(h'\vec{Q}_1^{(1)} + h\vec{A}_0^{(1)}\right)\vec{f}^{(1)}(x,0) \tag{5}$$

Diskontinuitet vektora napetosti i gibanja djeluje kao *seizmički izvor*. Kada je diskontinuiranost od $\vec{f}$ dovoljno manja od samog $\vec{f}$, onda možemo zamijeniti $\vec{f}^{(1)}$ i $\vec{f}^{(2)}$ na desnoj strani jednadžbe (5) s $f^{(0)} \sim f^{(1)} \sim f^{(2)}$. Tada (5) možemo napisati u obliku

$$\vec{f}^{(2)}(x,0) - \vec{f}^{(1)}(x,0) = \left[h'(x)\left(Q_1^{(2)} - Q_1^{(1)}\right) + h(x)\left(A_0^{(2)} - A_0^{(1)}\right)\right] f^{(0)}(x,0) \tag{6}$$

Primijenimo Fourierov transform na gornju jednadžbu te prijeđemo s produkta u x-prostoru u konvoluciju u k-domeni, te dobivamo

$$\vec{f}^{(2)}(x,0) - \vec{f}^{(1)}(x,0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(k-k')L_{21}(k,k')f^{(0)}(k')dk' \quad , \tag{7}$$

gdje je za P-SV valove

$$L_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1} & 0 \\ -k'\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_2+2\mu_2} - \frac{\lambda_1}{\lambda_1+2\mu_1}\right) & 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_2+2\mu_2} - \frac{1}{\lambda_1+2\mu_1} \\ -\left(\rho_2-\rho_1\right)\omega^2 + (\zeta_2-\zeta_1)kk' & 0 & 0 & -\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_2+2\mu_2} - \frac{\lambda_1}{\lambda_1+2\mu_1}\right)ik \\ 0 & -\left(\rho_2-\rho_1\right)\omega^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\zeta = 4\mu\left(\lambda+\mu\right)/\left(\lambda+2\mu\right),$
$h' = dh/dx$

Za SH valove L_{21} je oblika:

$$L_{21} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{\mu_2} - \dfrac{1}{\mu_1} \\ -(\rho_2 - \rho_1)\omega^2 + (\mu_2 - \mu_1)kk' & 0 \end{pmatrix}.$$

Slično rješenju za problem perturbacije u svojstvima materijala i rješenje problema nepravilnog oblika granične plohe prikazuje se konvolucijom primarnog valnog polja s oblikom granične plohe u k-prostoru. Ako $h(x)$ sporo varira, a $h(k)$ je koncentriran u $k = 0$, onda raspršeni valovi imaju isti valni broj kao upadni valovi (primarni). Ako se $h(x)$ naglo (oštro) mijenja, prostorni spektar $h(k)$ će bit „širok“, pa dolazi do međudjelovanja valnih brojeva uključivši raspršenje unatrag.

Prethodnim razmatranjima utjecaja lateralnih nehomogenosti na rasprostiranje valova utrli smo put proučavanju koda valova, što će biti predmet izučavanja u kolegiju Seizmologija IV.