

PREDAVANJA IZ 2. DIJELA DINAMIČKE METEOROLOGIJE III, IV

4. god. ukupnog studija, novi nastavni program

UVOD U MEZOSKALNU METEOROLOGIJU I ATMOSFERSKU TURBULENCIJU

**Branko Grisogono, Željko Večenaj, Danijel Belušić i bivši studenti 4. godine
predbolonjskog studija**

Dinamička meteorologija
Geofizički odsjek, PMF, Sveučilište u Zagrebu
Horvatovac 95, Zagreb, Hrvatska

Interne skripte, zadnja verzija od 13. lipnja 2024.

Nije dozvoljeno umnožavanje, prodaja i citiranje, osim u slučaju studentskih izvješća i diplomskih radova. U ostalim slučajevima potrebno je prethodno kontaktirati prvog autora.

Internal scripts, last version as from 13th of June 2024

This material may not be copied, sold or cited, except in the case of students' internal reports and undergraduate diploma works. In all other cases, the first author must be contacted.

PREDGOVOR I UVOD

Uvod u mezoskalnu meteorologiju i atmosfersku turbulenciju je činio najveći dio predavanja iz završnog kolegija Dinamičke meteorologije, na zadnjoj godini studija fizike – geofizike, smjera meteorologija i fizička oceanografija na PMF-u u Zagrebu do uključivo 2008. god. Kasnije, ova problematika je podijeljena u dva kursa prema novo-nametnutom tzv. „bolonjskom“ nastavnom programu: Dinamička meteorologija III (ukupno 7. semestar, diplomski studij, 2 zajednička smjera) i IV (ukupno 8. semestar, 1 smjer, produbljivanje prethodnog gradiva). Najkraće rečeno: studenti ovog novog nastavnog programa u 3. godini (završna godina za tzv. prvostupnika, tj. 1. god. u Geofizičkom odsjeku) uče ono što će eventualno studirati u 4. godini (2. god. u Geofizičkom odsjeku); u 4. godini studiraju, a u 5. godini (3. god. u Geofizičkom odsjeku) uče o onome što su (trebali) naučiti i izrađuju završni rad. Stoga je 4. godina bila i ostala relativno najteža godina studija u Geofizičkom odsjeku (prema tvrdnjama više od stotinu studenata i mišljenju autora); tu se najviše koriste matematički alati i proučavaju teorije. Nadalje, u 4. godini studija se proučava i nerazjašnjeni problem klasične i kvantne fizike – turbulentno strujanje fluida.

Nakon dinamike velike skale (sinoptičke i planetarne) te poželjnih paralelnih kurseva iz uvoda u fizičku meteorologiju i klimatologiju, studenti se ovdje upoznaju s osnovama dinamike na skali između one što vide na TV-u i tzv. sinoptičkim kartama, s jedne strane, i one koju vide prostim okom i koju 'osjećaju', pojedini tipični meteorološki uređaji. U zadnjem dijelu skripte se bavimo tom najmanjom a relevantnom skalom, tj. mikrometeorologijom. Tamo je turbulencija (pojačano miješanje u fluidu) dominantna, ili barem važna, u svim procesima. Ovo je prva vrsta ovakve skripte iz mezoskalne i mikroskalne meteorologije u Hrvatskoj besplatno dostupna od 2007. godine; zahvalni smo za buduće ispravke i nadopune sadržaja što slijedi. Postoje izvjesne nekonzistencije u npr. korištenju kurzivnih znakova, literature, tipova slova i mijenjanja oznaka, kvalitete slika, itd; autori se ispričavaju zbog tih neuniformiranosti i neujednačenosti. Cilj nam je bio da studentima što prije bude dostupna prva literatura na hrvatskom jeziku iz uvoda u mezoskalnu i mikroskalnu meteorologiju. Važnost mezoskalne i mikroskalne meteorologije je višestruka. Ova tematika ulazi u srž pogrešaka prognostičkih i klimatskih modela jer kaotičnost atmosfere povećava pogreške zbog nepouzdanosti početnih i rubnih uvjeta upravo na ovim relativno malim skalama. Prvenstveno zato su i uvedene ansambl prognoze (engl. *Ensemble Prediction System*, EPS) što je oblik Monte Carlo analiza koje koriste višestruke numeričke prognoze s logički variranim početnim uvjetima. Druga varijanta ovakvih analiza je koristiti iste početne uvjete i varirati parametrizacije u prognostičkim i klimatskim modelima uključujući deklaracije preciznosti pojedinih polja. Na taj se način mogu proučavati i simulacije ekstremnih događaja čije se raspodjele mijenjaju u prosječno sve toplijoj klimi. No, prvo treba proučiti koji se relevantni procesi odvijaju na ovim skalama.

Recimo nešto detaljnije o skalama geofizičkih fluida. Rossbyjev broj je omjer advektivne i Coriolisove akceleracije, $Ro = U/(fL)$, gdje su U i L karakteristična brzina i horizontalna skala strujanja i f je Coriolisov parametar; za mezoskalu je Ro između $Ro \sim 1$ i $Ro \gg 1$, tj. $Ro \geq 1$. Za razliku od sinoptičke skale, gdje najčešće vrijedi kvazigeostrofička teorija u izvantropskim širinama i $Ro \ll 1$, ili barem $Ro < 1$, na mezoskali je sila gradijenta tlaka najčešće uravnotežena advektivnom i ponekad konvektivnom akceleracijom, i/ili divergencijom turbulentnih tokova impulsa. Mada Coriolisov doprinos na mezoskali može biti važan, on tamo gotovo nikad nije dominantan. Tako i suptilno, indirektno dolazimo do naziva 'mezo' za skalu koju proučavamo.

Skripta je započeta na osnovi zapisa studenata iz nekoliko prethodnih generacija, posebice one u proljeće 2006. god. Autori se zahvaljuju: Dei Doklešić, Petri Čiček, Veri Čizmić, Lidiji Fuštar, Goranu Gašparcu, Mariju Hanžeku, Kristini Klemenčić, Valentini Madžarević, Suzani Maretić, Ivi Međugorac, Meliti Milostić, Ani Paragis, Dragani Zovko i Renati Sokol na urednom zapisivanju pojedinih lekcija iz „stare“ Dinamičke meteorologije IV. Studenti koji su kasnije

pratili ovaj kurs su pomogli u ispravljanju pogrešaka; to su između ostalih, Jelena Ferina, Vjeran Magjarević, Vedrana Džaja, Valentino Neduhal i ostali. Ukupni doprinosi apsolutno i studenata završne godine studija iznosi oko 60% u ovoj skripti koja je pisana, uz manje prekide, tokom više od 3 godine. Stoga, bilo bi jednako ispravno (ali nepraktično zbog daljih verzija i nadopuna) navesti prvu skupinu studenata kao suautore, a službene autore također kao suautore i urednike ove skripte. Spomenuti studenti su se bili složili da je ovo optimalna varijanta skripti. Također se zahvaljujemo Zlatku Matici na izradi nekoliko slika za ovu skriptu. Od kraja 2009. naovamo skripta je podvrgnuta samo manjim povremenim korekcijama i dopunama. Budući da je ovo interna skripta ne smije se umnožavati, prodavati i citirati, osim u posebnim prilikama (navedeno na 1. str.). Skripta se ispravlja i doraduje na otprilike sezonskoj osnovi.

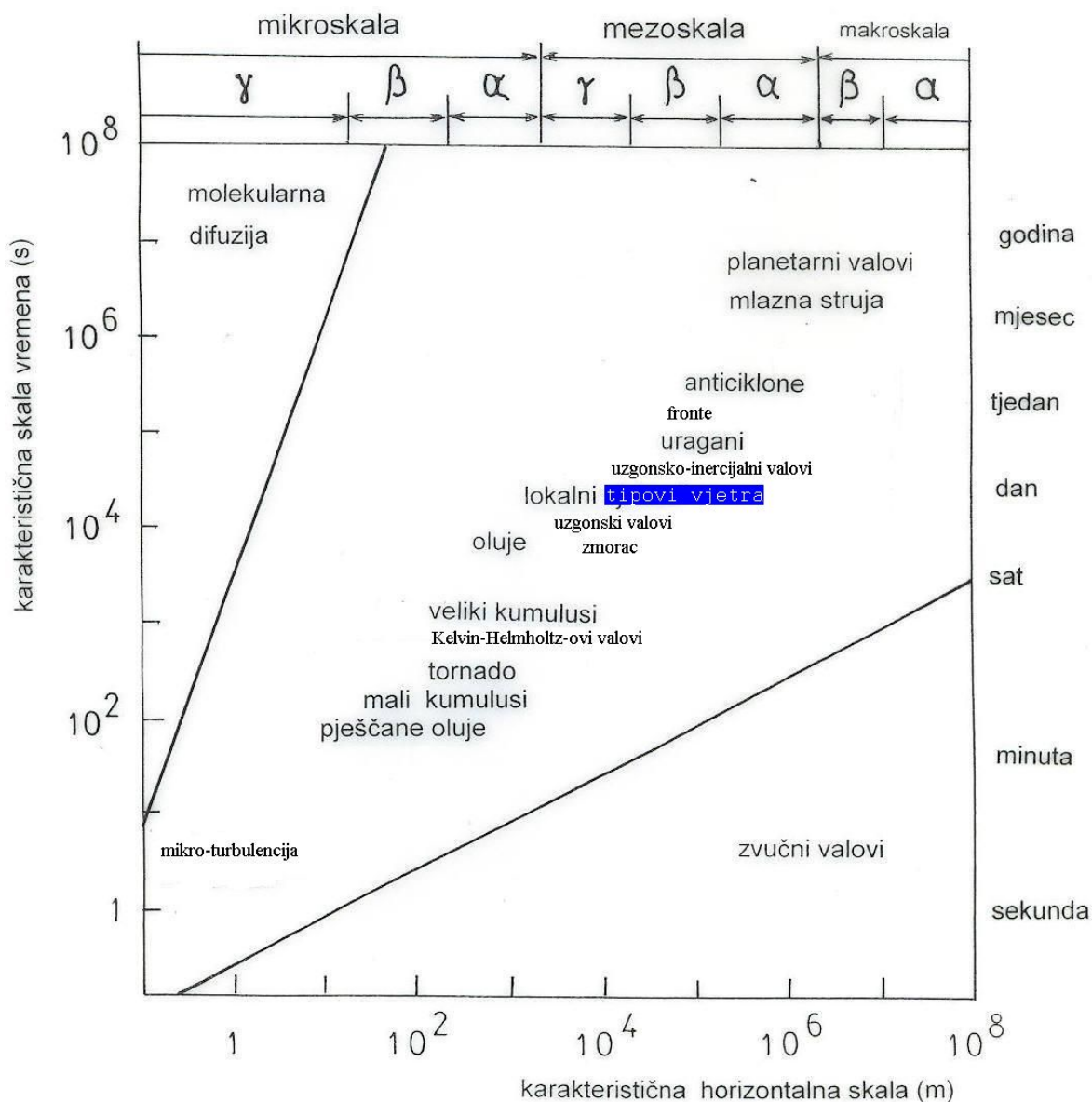
Napomenimo da za ovakav kolegij nema solidnog sveobuhvatnog teorijskog udžbenika; postojeće knjige se uglavnom odnose na sinoptičku ili planetarnu skalu, ili na mikroskalu i turbulenciju. Jedan od razloga za to jest što ne postoji sveobuhvatna teorija koja bi objedinila dinamičke procese između subsinoptičke i lokalne (prvenstveno turbulentne) skale. Čak i ako odvojimo mikrometeorologiju s turbulencijom od mezoskalne meteorologije, opet ne postoji izvrstan i sveobuhvatan udžbenik iz tog područja na diplomskom nivou, tj. iz mezoskalne meteorologije. S tom se nepopularnom činjenicom slažu i vodeći eksperti u atmosferskoj turbulenciji kao npr. Larry Mahrt i Sergej Zilitinkevich, kao i ekvivalentni eksperti u mezoskalnoj dinamici - Dale Durran, Richard Rotunno, David Raymond i ostali. U novije vrijeme udžbenik Lina (2007) daje vrlo solidan pregled mezoskalne meteorologije na poslijediplomskom nivou.

Na mezoskali postoji cijeli niz uglavnom nelinearnih procesa koji se međusobno natječu za razmjenu energije između velike i male skale. Ponekad je linearizacija tih procesa opravdana, kao u slučaju uzgonskih (težinskih) valova, pa je moguće doći do pripadne solidne teorije i njene praktične primjene u prognozi vremena. No s druge strane, postoje brojni procesi za koje danas ne poznajemo dobra pojednostavljenja, npr. duboka mokra konvekcija (3D nehidrostatički ne-Boussinesqov, nestacionaran turbulentni proces), ili razvoj stratificirane turbulencije; tu je napredak znanosti i spoznaje fragmentiran i otežan. Moderna mjerenja i numeričke simulacije su u tim područjima istraživanja od neprocjenjive koristi. Turbulencija, koja se neizostavno javlja u dinamici geofizičkih, astrofizičkih i ostalih fluida, ostaje i dalje jedan od glavnih principijelno neriješenih problema fizike.

Nakon ovog vrlo neformalnog predgovora i uvoda, krenimo se pobliže upoznati s osnovama mezoskalne i mikroskalne meteorologije. Pregled atmosferskih skala je ilustriran na Sl. 1. Spomenimo opet da ovdje proučavamo mezoskalne i mikroskalne atmosferske procese koji su odgovorni za meteorološko vrijeme u trajanju duljem od jedne minute do najviše jednog dana. Napomenimo da npr. sinoptička skala uglavnom odgovara α -mezoskali, subsinoptička β -mezoskali, itd.

Studenti i čitatelji će uz ovu skriptu imati priliku da razviju osjećaj za atmosfersku mezoskalu i mikroskalu i da je prepoznaju u svakodnevnom životu gledajući u npr. razvoj Kelvin-Helmholtzovih valova na stratusnom oblaku ($\sim 10 \text{ km} \times 5 \text{ km} \times 0.5 \text{ km}$), prateći 20-minutni razvoj i raspad malog kumulusnog oblaka ($\sim 1 \text{ km} \times 1 \text{ km} \times 0.3 \text{ km}$), itd. Netko će od studenata nakon ovog kursa postati bolji prognostičar jer će bolje shvatiti kompleksnost projekcije prognoze s velike na malu skalu (te pripadni eventualni povratni efekt na veliku skalu); netko će se odlučiti postati numerički modelar i pokušati što bolje tretirati turbulenciju u numeričkim modelima za prognozu vremena, ili će pokušati bolje izmjeriti valne i turbulentne signale u atmosferi. Netko će se bolje snaći u ekologiji i pristupima alternativnim oblicima energije. Za mikrometeorologe u agrometeorologiji, prometu, šumarstvu itd. bi također trebalo biti mjesta. A netko će, pak, možda i napustiti dinamiku geofizičkih fluida zahvaljujući mezoskalnoj meteorologiji.

MZOŠ je pružio indirektnu potporu izradi ove skripte u periodu 2007-2010. godina; B.G. je bio potpomognut projektom BORA, br. 119-1193086-1311 a D.B. projektom AQCT, br. 119-1193086-1323.



Slika 1. Ilustracija prostorno-vremenske raspodjele dominantnih atmosferskih pojava u log-log dijagramu horizontalne i vremenske skale. Između 2 pravca se nalaze neke značajne pojave koje se tipično proučavaju u dinamičkoj meteorologiji. Fokus ove skripte je na strukture između fronti i mikro-turbulencije.

Većina predstojećih modela su ili linearizirani sustavi, ili su heuristički (plauzibilni) na neki drugi način (npr. kroz nedostatak strogosti pojedinih izvoda). U ovoj skripti se oslanjamo i na mjerenja i na numeričke simulacije kako bi što bolje pojmlili mezoskalne i mikroskalne procese. Pri tome su opisi najčešće kratki, jer u kursu se ne stizemo detaljno baviti specijalnim mjerenjima kao niti postavljanjima numeričkih modela i pripadnim simulacijama. Spomenute pristupe, bez kojih se čovjek ne može stvarno baviti mezoskalnom ili mikroskalnom meteorologijom, koristimo u

skripti kao provjere hipoteza, ili kao osnove za postavljanje pitanja i pojednostavljenih modela. Za one koji se zaljube u problematiku ove skripte, preporučamo da prouče navedenu literaturu i provjere prikladne sadržaje naših poslijediplomskih kurseva.

Poglavljja su napisana što samostalnije i tako da su neovisna o drugim poglavljima koliko je god to bilo moguće; brojevi jednažbi i slika svakog poglavljja počinju ispočetka, većina je slika skinuta s interneta, ili skenirana tako da su uglavnom loše kvalitete. Navodi literature su sporadični i daleko od toga da su ravnopravni prema opće prihvaćenoj ekspertizi, već prema individualnim sklonostima autora i njihovom istraživanju nekih od ovdje obuhvaćenih područja. To je moguće i dozvoljeno kad se zna što je literatura na osnovi koje je napisana skripta, kao prvi kurs studentima ovog znanstvenog područja: Holton (2004) i Stull (1988). Dopunska literatura je je vrlo razgranata (npr. Acheson 1990, Kundu i Cohen 2002, Lin 2007). Pred sam kraj ove skripte navodimo nekoliko detalja iz novije literature o atmosferskoj turbulenciji, kako su to uredili Baklanov i Grisogono (2007); veći dio tog posljednjeg dijela skripte je prvenstveno namijenjen poslijediplomskoj nastavi. Na osnovi prva dva spomenuta udžbenika, prateći vježbe i djelomice seminare, studenti mogu uspješno završiti ovaj kurs a bez da se koriste ovom skriptom. Lin (2007) uvelike nadmašuje dubinom i širinom svoje knjige sadržaj ove skripte, osim eventualno u jednom manjem dijelu tretiranja atmosferskih graničnih slojeva.

Slijedi sadržaj ove skripte te pripadni materijal izložen uglavnom u kaskadi od (sub)sinoptičke ka progresivno sve manjoj skali. Za uspješno praćenje skripte potrebno je predznanje iz uvodnih kurseva u Dinamičku meteorologiju i dinamiku fluida, kursevi iz opće fizike te nekoliko kurseva matematike. U kursu Dinamička meteorologija III, po novom programu s kraja 2008. godine, obrađuju se poglavljja: 3, 4, 7, 10, 11, 12, 14, te djelomice 9 i 13. U 'produbljujućem' pripadnom kursu Dinamička meteorologija IV, obrađuju se preostala poglavljja (izuzev 18. poglavljja koje je izborna) nastavljajući se na ostala poglavljja iz skripti, kao i na temama iz udžbenika. Poglavlje 19 i 20 čine sažetak kursa i popis prateće literature.

OSNOVNI SADRŽAJ

1. SEMIGEOSTROFIČKA TEORIJA, kvazi i semigeostrofija, frontogeneza
2. SIMETRIČNA NESTABILNOST, Eliassen-Sawyerova jednađba, PV
3. UVOD U UZGONSKE VALOVE: IZMJENA ENERGIJE I IMPULSA
4. UZGONSKI VALOVI, planinski valovi u 2D
5. UZGONSKO-INERCIJSKI VALOVI, 3D
6. KELVIN-HELMHOLTZovi VALOVI, linearna analiza nestabilnosti
7. UVOD U KONVEKCIJU, uvjetna nestabilnost, tipovi
8. UVLAČENJE ZRAKA, „CAPE“, utjecaj na vertikalnu brzinu
9. KONVEKTIVNE OLUJE, RAZVOJ VRTLOŽNOSTI U SUPER-MA
10. PLANETARNI GRANIČNI SLOJ, REYNOLDSOVO USREDNJAVANJE, turbulencija
11. GRANIČNI SLOJ S HORIZONTALNO HOMOGENOM TURBULENCIJOM
12. K-TEORIJA , DULJINA MIJEŠANJA, EKMANOV SLOJ
13. OBUKHOVLJEVA DULJINA, L, horizontalni turbulentni sloj, Kolmogorovljeva teorija
14. PROGNOŠTIČKA JEDNADŽBA ZA VARIJANCE, viši nivoi „zatvaranja“
15. PROGNOŠTIČKA JEDNADŽBA ZA KOVARIJANCE, problem parametriziranja
16. PRANDTLOV MODEL, nagnuti turbulentni sloj
17. NUMERIČKO MODELIRANJA GRANIČNIH SLOJEVA, neki primjeri
18. ODABRANA POGLAVLJA IZ ATMOSFERSKE TURBULENCIJE
19. LITERATURA

Slika 1.1 Ilustracija pojednostavljene 3D sinoptičke situacije s naglašenim geostrofičkim i ageostrofičkim strujanjem, u_g i u_a , niskim i visokim tlakom te toplim (crveno) i hladnim (plavo) zrakom. Ovdje N i W prikazuju smjer sjevera i zapada a vertikalna, z , je prema gore. U prosjeku se ovakav sustav u izvan-tropskim širinama giba k istoku zbog dominantnog strujanja u pripadnoj troposferi (Preuzeto s interneta i modificirano).

Osnovne jednadžbe semigeostrofije

Kvazigeostrofija se bazira na pretpostavci da je vjetar predominantno horizontalan, V_h , i da se može aproksimirati kao $V_h = V_g + R_o V_a + \dots$ gdje su na desnoj strani geostrofički vjetar, mali Rossbyjev broj i ageostrofički vjetar (slabiji od geostrofičkog vjetra po iznosu). Nastavljamo razvojem dinamičkog sustava jednadžbi koji detaljizira poznati nam kvazigeostrofički sustav, da bismo npr. objasnili najintenzivniji dio Slike 1.1, a na uštrb zanemarivanja nekih elemenata kvazigeostrofičkog modela. To će nam ovdje biti 2D semigeostrofija (tj. polugeostrofija). Da bi se dobile semigeostrofičke jednadžbe koriste se redom kvazigeostrofičke jednadžbe gibanja, termodinamike, hidrostatike i kontinuiteta (za bitna proširenja vidi Cullen 2006):

$$\frac{Du}{Dt} - fv + \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{Dv}{Dt} + fu + \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{D\Theta}{Dt} + w \frac{d\vartheta_0}{dz} = 0 \quad (3)$$

$$g \frac{\Theta}{\vartheta_{00}} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (5)$$

gdje simboli imaju standardno značenje: u , v , w , Θ i Φ su 3 komponente strujanja, potencijalna temperatura i geopotencijal, $\vartheta_0(z)$ je pot. temp. osnovnog neporemećenog stanja atmosfere, odnosno ϑ_{00} je pripadna referentna vrijednost, dok su f i g Coriolisov parametar i iznos ubrzanja sile teže. Primjenjena je Boussinesqova aproksimacija (vrijedi za „plitke procese“ gdje se jednostavno pretpostavlja da je brzina zvuka beskonačno velika i nebitna za sve relevantne meteorološke brzine, gustoća je približno konstantna, osim kad je pomnožena s uzgonskom akceleracijom) pa se može staviti za gustoću zraka konstantnu (referentnu) vrijednost, ρ_0 .

Uvedene su veličine $\Phi(x, y, z, t) = \frac{p - p_0}{\rho_0}$ tj. devijacija tlaka podijeljena s gustoćom (za

geopotencijal), te $\Theta = \vartheta - \vartheta_0$ tj. devijacija potencijalne temperature od referentnog profila; $p_0(z)$ i $\vartheta_0(z)$ vertikalno su ovisne vrijednosti tlaka i potencijalne temperature za standardnu atmosferu. Možda najjednostavniji i najkraći izvod za (4) slijedi iz geostrofičke forme (2), tj. bez 1. člana, derivirajući to po z , što daje komponentu proporcionalnu termalnom vjetru, te integrirajući izraz obzirom na y koordinatu.

Osnovna, standardna atmosfera je u hidrostatickoj i geostrofičkoj ravnoteži. Pripadna termodinamička ravnoteža može se opisati kao $g \vartheta_0 / \vartheta_{00} = \partial \varphi_0 / \partial z$, gdje je ϑ_{00} referentna

potencijalna temperatura, npr. srednjak po vertikali od $\vartheta_0(z)$, dok φ_0 odgovara neporemećenom geopotencijalu, $\sim p_0/\rho_0$.

Neka su karakteristične horizontalne skale fronte L_x, L_y i neka je $L_x \gg L_y$, tj. horizontalana skala paralelna s frontom, koja se proteže od zapada k istoku paralelno s x osi, mnogo je veća nego skala okomita na frontu što prolazi kroz frontu. Ovo upućuje na to da se fronte mogu modelirati kao približno dvodimenzijske (2D) strukture. Bira se koordinatni sustav takav da je u tom sustavu fronta stacionarna, te se uzima da je smjer okomit na frontu paralelan y osi. Na sličan način uzimamo $U \gg V$, gdje je U karakteristična skala komponente vjetra duž fronte, a V je slična skala komponente vjetra okomite na frontu. Neka su karakteristične vrijednosti za ove veličine slijedeće: $L_x \sim 1000$ km, $L_y \sim 100$ km, $U \sim 10$ m/s, $V \sim 1$ m/s. Ako se pretpostavi da je vremenska skala advekcije u smjeru okomitom na frontu obrnuto proporcionalna s: $\frac{D}{Dt} \sim \frac{V}{L_y}$, i uz

poznati Rossbyjev broj $R_o \equiv \frac{V}{fL_y} \ll 1$, onda se magnituda omjera inercijskog i Coriolisovog člana u x i y komponenti jednadžbe gibanja može izraziti kao:

$$x: \quad \frac{\left| \frac{Du}{Dt} \right|}{|fv|} \sim \frac{UV}{fL_y} \sim R_o \left(\frac{U}{V} \right) \sim 1$$

$$y: \quad \frac{\left| \frac{Dv}{Dt} \right|}{|fu|} \sim \frac{V^2}{fU} \sim R_o \left(\frac{V}{U} \right) \sim 10^{-2}.$$

Vidljivo je da je u komponenta brzine vjetra u geostrofičkoj ravnoteži s kroz-frontalnim gradijentom sile tlaka do na 1% (donji izraz), dok v komponenta brzine nije to ni približno s pripadnim niz-frontalnim gradijentom tlaka (gornji izraz). Za geostrofički vjetar vrijedi

$$fu_g = -\partial_y \Phi, \quad fv_g = \partial_x \Phi.$$

Za semigeostrofičku komponentu vjetra u stoga možemo staviti da je jednaka geostrofičkoj (to je ona koja puše ovdje niz/uz frontu) dok za v komponentu (kroz frontu) to ne vrijedi, tj.

$$u \approx u_g \quad v \approx v_g + v_a.$$

Ageostrofička komponenta v_a jednakog je reda veličine kao i v_g . Drugim rječima, zbog $R_o(U/V) \sim 1$ u x -komponenti gibanja spomenuta ageostrofička komponenta vjetra se ne smije zanemariti u ovoj teoriji, dok je očito da zanemarujemo u_a . Pri tome ne smijemo zaboraviti da smo zbog jednostavnosti postavili frontu zonalno, a da v komponenta vjetra puše meridionalno (npr. od juga k sjeveru za $v > 0$).

Ako se gore navedene relacije za u i v uvrste u jednadžbe od (1) do (5), onda se dobiju nove pojednostavljene jednadžbe istog redoslijeda:

$$\frac{Du_g}{Dt} - fv_a = 0 \quad (6)$$

$$\frac{Dv_g}{Dt} + \frac{Dv_a}{Dt} = \frac{Dv}{Dt} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{D\Theta}{Dt} + w \frac{d\mathcal{G}_0}{dz} = 0 \quad (8)$$

$$f \frac{\partial u_g}{\partial z} = - \frac{g}{\mathcal{G}_0} \frac{\partial \Theta}{\partial y} \quad (9)$$

$$\frac{\partial v_a}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (10)$$

Jednadžbe (6) i (8) su prognostičke, dok su ostale dijagnostičke jednadžbe; ukupno se radi o 5 polja. Iz ovih jednadžbi se može vidjeti da su zonalni impuls i advekcija paralelna s frontom (način figuriranja u_g u (6) do (10)) još uvijek približno geostrofički. Advekcija impulsa i temperature kroz frontu posljedica je postojanja i geostrofičkog vjetra i ageostrofičke cirkulacije. Od tuda naziv semigeostrofija.

Kroz-frontalna (sekundarna) cirkulacija i SAWYER-ELIASSENOVA jednadžba

Promatramo cirkulaciju kod ulaza u mlaznu struju. Zanima nas što se događa s $\partial T / \partial y$ (fronta leži u području gdje je taj gradijent najveći). Semigeostrofičke jednadžbe, (6) do (10), mogu se upotrijebiti za određivanje kroz-frontalne ageostrofičke cirkulacije tako što će se gledati raspodjela zonalnog vjetra ili temperature. To su najvažnija polja iz kojih najlakše dolazimo do shvaćanja ove cirkulacije. Ključna je činjenica da vrijedi ravnoteža termalnog vjetra, što uz već uvedenu Boussinesqovu aproksimaciju znači:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial y} \approx \frac{\partial T}{\partial y} \propto \frac{-\partial u_g}{\partial z}, \text{ odnosno } \frac{\partial \Theta}{\partial x} \approx \frac{\partial T}{\partial x} \propto \frac{\partial v_g}{\partial z}.$$

Da bi se dobila prognostička jednadžba za horizontalni gradijent temperature koristi se jednadžba (3) tj. (8) u kojoj se nelinearna individualna promjena $\frac{D\Theta}{Dt}$ zamijeni onom koja vrijedi za semigeostrofiju te se razdvoji na članove pomoću izraza (ispod su podvučeni članovi uz kvazi-geostrofičke promjene, a ostalo su ageostrofički doprinosi):

$$D/Dt \rightarrow \frac{D_g}{Dt} + \frac{D_{ag}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \underline{u_g \frac{\partial}{\partial x} + v_g \frac{\partial}{\partial y} + v_a \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}}.$$

Zatim (3) tj. (8) parcijalno deriviramo po y , tj: $\frac{D\Theta}{Dt} + w \frac{d\mathcal{G}_0}{dz} = 0 \quad | \partial/\partial y$.

Uvedu se oznake: $N^2 = \frac{g}{\mathcal{G}_0} \frac{\partial \mathcal{G}_0}{\partial z}$, $N_s^2 = N^2 + \frac{g}{\mathcal{G}_0} \frac{\partial \Theta}{\partial z}$, gdje je N_s^2 ukupna uzgonska frekvencija

(na kvadrat) koja može uključivati i mokro-adijabatičke efekte kroz svoj drugi član. Nakon množenja s dimenzionalnom konstantom g/\mathcal{G}_0 na pojedinoj visini, konačno, dobije se jednadžba za horizontalni gradijent temperature koja glasi:

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{g}{\mathcal{G}_0} \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right) = - \frac{g}{\mathcal{G}_0} \left(\frac{\partial u_g}{\partial y} \frac{\partial \Theta}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial x} \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right) - \frac{\partial v_a}{\partial y} \frac{\partial \Theta}{\partial y} \frac{g}{\mathcal{G}_0} - \frac{\partial w}{\partial y} N_s^2 \quad (11)$$

gdje 1. član na desnoj strani, $Q_2 \equiv -\frac{g}{g_0} \left(\frac{\partial u_g}{\partial y} \frac{\partial \Theta}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial x} \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right)$, predstavlja y komponentu prije

spomenutog \vec{Q} vektora i u njemu je iskorištena činjenica nedivergentnosti geostrofičkog vjetra (točnije rečeno, Q_2 je proporcionalan y komponenti tog vektora). Uočite da zadnja 2 člana u (11) sadrže nove doprinose obzirom na \vec{Q} formulaciju u standardnoj kvazigeostrofičkoj teoriji; ta 2 člana dolaze od ageostrofičkih doprinosa. Nadalje, ovaj izraz za Q_2 se može na više načina zapisati: $Q_2 \equiv \frac{g}{g_0} J_{x,y}(u_g, \Theta) = \dots - (\partial_y u_g \partial_x b + \partial_y v_g \partial_y b)$, gdje b predstavlja uzgon. Također,

koristeći relaciju za termalni vjetar: $Q_2 \equiv \frac{g}{g_0} J_{x,y}(u_g, \Theta) = J_{y,z}(v_g, u_g) f$. Jakobijan J daje mjeru

iskrivljenja površine između izolinija polja (a, b) , $J_{x,y}(a, b) = (\partial_x a)(\partial_y b) - (\partial_x b)(\partial_y a)$. Iz definicije Q_2 vidimo da 1. član, $\sim (\partial_y u_g)(\partial_x \Theta)$, predstavlja utjecaj deformacije smicanja geostrofičkog vjetra u zonalnom temperaturnom gradijentu, dok 2. član, $\sim (\partial_y v_g)(\partial_y \Theta)$, predstavlja efekt deformacije rastezanja geostrofičkog vjetra u meridionalnom temperaturnom gradijentu.

Ako se diferencira izraz (6), tj. $\frac{Du_g}{Dt} - fv_a = 0$, parcijalno po z , te pomnoži s f , zatim se iskoristi (9), dobije se prognostička jednačba za termalni vjetar koja glasi:

$$\frac{D}{Dt} \left(f \frac{\partial u_g}{\partial z} \right) = Q_2 + \frac{\partial v_a}{\partial z} \left(f^2 - f \frac{\partial u_g}{\partial y} \right) + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial \Theta}{\partial y} \frac{g}{g_0}. \quad (12)$$

Zbrajanje izraza (11) i (12) dovodi na lijevoj strani do nule; ostatak tog zbrajanja je dijagnostička jednačba koja predstavlja stacionarno prekretnje strujanja, tj. kvazistacionarnu cirkulaciju u (y, z) ravnini, a to je i bit kroz-frontalne cirkulacije:

$$2Q_2 = \frac{\partial v_a}{\partial z} \left(f \frac{\partial u_g}{\partial y} - f^2 \right) - \frac{\partial w}{\partial z} \left(\frac{g}{g_0} \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right) + \frac{\partial v_a}{\partial y} \frac{\partial \Theta}{\partial y} \frac{g}{g_0} + N_s^2 \frac{\partial w}{\partial y}. \quad (13)$$

Geostrofičko forsiranje, koje ovdje predstavlja Q_2 , nastoji uništiti ravnotežu termalnog vjetra tako što mijenja meridionalni temperaturni gradijent i vertikalno smicanje u jednačbi za termalni vjetar. Promjene su jednake po iznosu, ali suprotne po smjeru. Tendenciji geostrofičke advekcije da se uništi geostrofička ravnoteža suprotstavlja se kroz-frontalna, transverzalna sekundarna cirkulacija (primarna cirkulacija je zonalna).

Primijetimo da se (13) odnosi na (y, z) ravninu u kojoj se odvija ageostrofičko strujanje (θ, v_a, w) ; stoga, ima smisla prikazati to isto gibanje kao $\vec{v}_a = \vec{i} \times \nabla \psi_M$. Uvrste li se izrazi: $v_a = -\frac{\partial \psi_M}{\partial z}$ te

$w = \frac{\partial \psi_M}{\partial y}$ u (13) uvođenjem strujne funkcije ψ_M , dobit će se tzv. Sawyer-Eliassenova jednačba:

$$N_s^2 \frac{\partial^2 \psi_M}{\partial y^2} + F^2 \frac{\partial^2 \psi_M}{\partial z^2} + 2S^2 \frac{\partial^2 \psi_M}{\partial y \partial z} = 2Q_2 \quad (14a)$$

gdje je: $F^2 = \left(f^2 - f \frac{\partial u_g}{\partial y} \right)$, $S^2 = -\frac{g}{g_{00}} \frac{\partial \Theta}{\partial y} = f \partial_z u_g$, N_S predstavlja i dalje totalnu uzgonsku

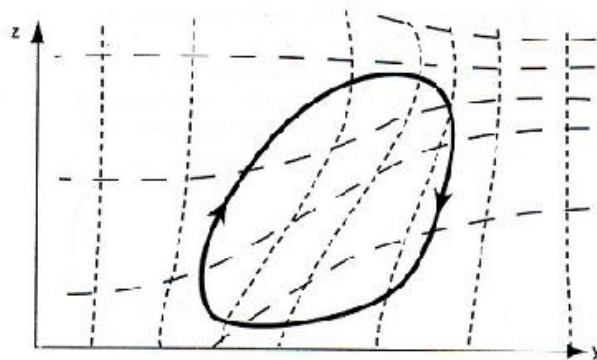
frekvenciju, S^2 je „smicajući član“ zbog termalnog vjetra (tj. meridionalnog temperaturnog gradijenta), a F^2 je apsolutna vrtložnost pomnožena s planetarnom vrtložnošću. Sawyer-Eliassenova jednačba predstavlja različite krivulje za strujnu funkciju koje opisuju kvazistacionarnu sekundarnu, tj. kroz-frontalnu cirkulaciju (u idealnom slučaju su to elipse, hiperbole, parabole, a inače može biti i izmiješano). Kvazigeostrofija zanemaruje advekciju ageostrofičkom cirkulacijom, tj. tamo vrijedi D_g/Dt . Zbog smicanja (u formi termalnog vjetra) po vertikali dolazi do izobličenja krivulje, koja onda u semigeostrofiji (14a) više nije idealna elipsa, kao u kvazigeostrofičkom strujanju gdje (14a) kolapsira u:

$$(N^2 \partial_{yy}^2 + f^2 \partial_{zz}^2) \psi = 2Q_2. \quad (14b)$$

U semigeostrofiji, još jednom, (14b) je postala izobličena elipsa ako je:

$$N_S^2 F^2 - S^4 > 0. \quad (15)$$

Iz teorije i geometrije parcijalnih diferencijalnih jednačbi¹, naime, slijedi da ako postane $N_S^2 F^2 - S^4 < 0$, onda i sustav postane hiperboličan (poput valne jednačbe). Takodjer, ako postane $N_S^2 F^2 - S^4 = 0$, onda i sustav prijeđe u parabolički tip (poput jedn. difuzije). Moguća prostorna varijabilnost koeficijenata N_S^2 , F^2 , S^4 te prisutnost poprečno deriviranog člana, uzrokuju distorziju u sekundarnoj cirkulaciji opisanoj u (14a), Slika 1.2. Frontalna se zona naginje prvenstveno prema hladnom zraku kako raste visina. Postoji intenzifikacija kroz-frontalnog toka u blizini velike apsolutne vrtložnosti na toploj strani fronte. Dolazi i do naginjanja cirkulacije s visinom, a zbog mogućnosti da (15) promijeni predznak u semigeostrofičkom slučaju, može doći i do spontane promjene samog karaktera pripadne parcijalne diferencijalne jedn. a onda i bitne promjene samog strujanja.



Slika 1.2 Veza između ageostrofičke cirkulacije (puna krivulja sa strelicama), potencijalne temperature (duge crtkane krivulje) i apsolutnog impulsa $M = fy - u_g$ (kratke crtkane krivulje). Hladnan zrak je na desnoj (sjever), y , a topli na lijevoj strani (Izvor: internet). Obzirom na smjer cirkulacije te predznak $\vec{v}_a = \vec{i} \times \nabla \psi_M$, zaključuje se da (v_a, w) gleda u $-x$ smjeru, tj. u stranicu i da je gradijent strujne funkcije uglavnom negativan. To ujedno znači da je ψ_M najveći u donjem desnom, a najmanji u gornjem lijevom dijelu grafa.

¹ $Ax^2 + By^2 + Cxy + ax + by + c = 0$; ako $AB - C^2 \geq 0$, radi se o elipsi ili paraboli ($= 0$), ako $AB - C^2 < 0$, radi se o hiperboli. Ako se pripadni parametri dovoljno mijenjaju da se mijenjaju i navedeni predznaci, onda je pripadna parcijalna diferencijalna jedn. mješovitog tipa. Na primjer, $yu_{xx} - 4u_{xy} + 4xu_{yy} = 0$ je mješovitog tipa jer joj navedena diskriminanta mijenja predznak ovisno o xy iznosu; eliptička je u ovom slučaju za $xy > 1$, hiperbolička za $xy < 1$, a parabolička za $xy = 1$.

Predznak od ψ_M sam po sebi je nebitan, no bitne su promjene tog $\psi_M(y, z)$. Za spec. slučaj ako je odabir Q_2 takav je da $Q_2 < 0$, jer u ulazu u mlaznu struju s x -paralelnim izotermama/izotropama, $\partial v_g/\partial y < 0$, $\partial \Theta/\partial y < 0$, a Q_2 je proporcionalan s $-[(\partial v_g/\partial y) \partial \Theta/\partial y] \Rightarrow Q_2 < 0$. Iz oblika (14a) vidimo da i lijeva str. mora biti < 0 , a ona dominantno (no, ne uvijek i nužno) sadrži otežani („fizikalni“) laplasijen. Ako je laplasijen od $\psi_M < 0$, onda je $\psi_M > 0$ u ovom specijalnom slučaju. Promatramo izobličenu elipsu, Sl. 1.2: veći dio lijeve str. ima $w > 0$, $v_a > 0$; to znaci da ψ_M raste s y , ali opada sa z (vidi def. za ta polja). Ovo promatramo od dna (dolje lijevo) do vrha (gore desno) elipse. Na većem dijelu desne strane iskrivljene elipse događa se suprotno; tamo z uglavnom upada i y opada (spuštajuće strujanje postupno k jugu) pa onda, vodeći brigu o predznaku promjene (y, z), zaključak je isti kao i za lijevu str. elipse.

Za semigeostrofičku advekciju postoji pozitivan povratni mehanizam, “feedback” koji jako reducira vremensku skalu frontogeneze u odnosu na kvazigeostrofički slučaj. Kako temperaturni kontrast raste, tako i Q_2 raste, sekundarna cirkulacija isto mora time jačati što znači da će stopa

pojačavanja $\left| \frac{\partial T}{\partial y} \right|$ rasti, tj. više neće biti konstantna, kao u kvazigeostrofičkom slučaju. Zbog tog

pozitivnog “feedbacka” i zbog nepostojanja trenja u ovom modelu, semigeostrofički model može dati beskonačno veliki temperaturni gradijent uz podlogu za manje od pola dana. Drugim riječima, ova teorija u principu može predvidjeti eksplozivan razvoj mezoskalnih fronti u roku od npr. jednog dana ili kraće (recimo, 10 h). Npr. barički sustav na Slici 1.1 će razviti frontogenezu u blizini najintenzivnijeg ageostrofičkog vjetrova, u_a , što je malo pomaknuto niz osnovnu struju – ovisno o strujanju na ostalim nivoima, posebice oko mlazne stuje koja se nalazi na oko 300 do 200 mb. Također i u nižoj troposferi dolazi do koncentracije gradijenata na malom prostoru a time i do intenzifikacije frontogenetičkog procesa; subsinoptička skala počinje progresivno igrati sve veću ulogu u razvoju fronte.

Očito da je (14) parcijalna diferencijalna jednadžba i to najčešće eliptičkog tipa, slična onoj u elektrostatici za električni potencijal i gustoću naboja, osim što je (14) kompliciranija. To se najlakše provjeri tako da se uvrsti za pripadne parametre one koji bi vrijedjeli u kvazigeostrofičkoj teoriji, dakle predominantno, N i f koji su pozitivni, a član s mješovitom derivacijom bi bio najmanji ili nula. U tom je slučaju (14) eliptička i to Poissonovog tipa (kao u elektrostatici). Inače (14) nije lako riješiti, jer bilo koja promjena u jednom od pripadnih parametara tj. koeficijenata ili rubnih uvjeta, dovodi do istovremene promjene u svim točkama domene (to nije slučaj s parabolikom i hiperbolikom jednadžbama, npr. s jedn. difuzije i valnom jednadžbom). Rješavanje (14) najčešće ide pomoću neke od metoda tzv. relaksacije, npr. 'over-relaxation method'. To pripada u iterativne numeričke metode. Spomenuta metoda je izvrsno opisana u starijem izdanju Holtonovog udžbenika iz 1979. godine i jako je poučna.

I dok je ovdje osnovna cirkulacija strujanje na velikoj skali, npr. mlazna struja ili neko drugo pretežno zonalno strujanje, sekundarna cirkulacija se odvija ovdje meridionalno kroz frontu. Odatle je i naziv ovog strujanja. Ponovimo, kompletan semigeostrofički sustav je nelinearan i moguće ga je jedino rješavati aproksimativno, tj. numerički. Mi smo ovdje uzeli sve ulazne parametre konstantnima; nismo modificirali u vremenu u_g i Θ , sustav (6) do (10), kako to zahtijeva semigeostrofija, već smo „iscijedili“ dijagnostičku bit sekundarnog strujanja, cirkulacije u meridionalnoj ravnini. Dakle, povelili smo se za kvalitativnim fizikalnim tumačenjem pojave anizotropije i pripadne sekundarne cirkulacije u strujanju oko fronte, a ne samim kvantitativnim prognoziranjem dinamičkih polja. Ovo drugo je moguće jedino uz pomoć 3D numeričkih modela i pripadnim simulacijama pojedinih početnih i rubnih uvjeta, no to ne pruža uvid u tumačenje procesa bitnih za razvoj vremena, što je predočeno ovdje.

Slijede 2 idealizirana primjera za trajanje „eksplozivne“ frontogeneze; procijeniti ćemo vremensku skalu za frontogenezu. Prvi primjer se odnosi na kvazigeostrofičku teoriju u kojoj je

horizontalna promjena geostrofičkog vjetra konstantna, tj. ne 'osjeća' promjenu u meridionalnom temperaturnom gradijentu. Drugi primjer se odnosi na semigeostrofičku teoriju u kojoj pretpostavljamo nekoliko oblika moguće idealizirane interakcije, tj. pojačanja horizontalnog gradijenta komponente vjetra zbog konvergencije strujanja u polju meridionalnog horizontalnog gradijenta temperature (ulazak u mlaznu struju).

Vidjeli smo u (14) da Q_2 forsira sekundarnu cirkulaciju oko fronte. Ako je Q_2 dodatno pojačan za vrijeme frontogeneze (ili dodatno oslabljen tijekom frontolize), može doći do eksplozivnog razvoja (ili brze degradacije) fronte; to se ne događa u kvazigeostrofičkom pristupu (Q_2 je konstantan ili sporo-varirajući u vremenu), već samo u semigeostrofiiji.

$$1) \text{ Kvazigeostrofiija: uz } D_g T/Dt \approx 0, \text{ te } Q_2 = -\frac{g}{g_{00}} \left(\frac{\partial u_g}{\partial y} \frac{\partial \Theta}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial x} \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right) \rightarrow \quad (16)$$

$$Q_2 \approx \frac{g}{g_{00}} \left(\frac{\partial u_g}{\partial x} \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right), \text{ iz (11) držeći } Q_2 = \text{const, uz } (D_g T/Dt)/\partial y,$$

$$\Rightarrow \frac{D_g(\partial T/\partial y)}{Dt} \approx \frac{\partial u_g}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} \sim \partial T/\partial y / \tau. \text{ Rješavajući ovako dobijenu diferencijalnu jedn. za } \partial T/\partial y$$

uz pretpostavku $\tau \sim 1000\text{km}/(10\text{m/s}) \sim 1.2$ dana, možemo procijeniti razvoj fronte. Za desetorostruko povećanje meridionalnog temperaturnog gradijenta treba proći vremena: $10 = \exp(t_{10}/\tau)$, tj $t_{10} \approx 2.75$ dana. To je presporo vrijeme za intenzivnu mezoskalnu frontogenezu koja se može ponekad dogoditi u roku od jednog dana. Dakle, tu nedostaje pozitivna povratna sprega koja bi u ovom slučaju pojačala komponentu gradijenta brzine odgovorne za jačanje temperaturnog meridionalnog gradijenta.

$$2) \text{ Semigeostrofiija: } Q_2 = -\frac{g}{g_{00}} \left(\frac{\partial u_g}{\partial y} \frac{\partial \Theta}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial x} \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right) \rightarrow ? \Rightarrow \frac{D_g(\partial T/\partial y)}{Dt} \approx \frac{\partial u_g}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} \sim \partial T/\partial y / \tau.$$

Tu ne znamo koja je spomenuta funkcionalna veza (povratna sprega) zadnjih dvaju faktora pa ne znamo ni procijeniti $\partial T/\partial y$. Jedna klasa moguće međusobne ovisnosti jest da prvi faktor ovisi po zakonu neke potencije o drugom, tj. da vrijedi:

$$Q_2 \approx \frac{g}{g_{00}} \left(\frac{\partial u_g}{\partial x} \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right) \Rightarrow \frac{D_g(\partial T/\partial y)}{Dt} \approx \left| \frac{\partial u_g}{\partial x} \right|_0 \left(\left| \frac{\partial T}{\partial y} \right|_0 \right)^P \frac{\partial T}{\partial y},$$

gdje za $P = 0$ imamo prethodni slučaj, dok za $0 < P \leq 1$ ta veza može čudno rasti. Za $P = 1$ i za τ kao i prije ovo daje beskonačni temperaturni gradijent nakon točno tolikog vremena $\tau \approx 1.2$ dana; veći $P > 1$ daje bržu frontogenezu.

$$\frac{\partial T}{\partial y} \approx \frac{(\partial_y T)_0}{(1 - (\partial_x u_g)_0 Pt)^{1/P}} = \frac{(\partial_y T)_0}{(1 - Pt/\tau)^{1/P}}$$

Za $0 < P \ll 1$ se dobije pak nerealistično brza eksplozivna frontogeneza dok sam smisao ovakvog eksponenta nije opravdan; dakle, ova parametrizacija u obliku potencije je neprikladna za $P \ll 1$, a donekle razumna za npr. $1/3 < P \leq 3$. Uključivanjem turbulentnog trenja u ovakve modele uspijeva se izbjeći beskonačni rast temperaturnog gradijenta. Glavna svrha ovakvih modela je kvalitativno opisati brzi razvoj i raspad fronti.

Nastavak ove teme je u idućoj lekciji koja povezuje semigeostrofiju i tip atmosferske nestabilnosti, što će u stvari biti podvrsta barokline nestabilnosti. Vidjeti ćemo zašto je fizikalno bilo važno identificirati karakter parcijalne diferencijalne jedn. (14) putem (15) i dalje.

2. SIMETRIČNA NESTABILNOST

a) Klasičan pristup

Mnogim problemima mehanike geofizičkih fluida pristupa se iz perspektive nestabilnosti strujanja. Nestabilnost mlazne struje u uskoj je vezi s baroklinom nestabilnošću, pojavom tranzijentnih vrtloga, meridionalnim meandriranjem mlazne struje i pojavom niza ciklona i anticiklona. Pojam nestabilnosti u dinamici (geofizičkih) fluida nije jednostavan jer se radi o nelokalnoj pojavi i npr. metoda česti, ili slična atraktivna heuristička metoda, nije dostatna. Najbliže zadovoljavajuće, i što je korisno ovdje, je metoda linearne perturbativne analize; što je detaljno razvijeno u primjeru dvoslojnog kvazigeostrofičkog modela baroklinih gibanja, Eadyjevom modelu, itd. U praksi se najčešće koriste numeričke metode za proučavanje nestabilnosti, no one vrlo rijetko daju tumačenje, već samo konačne rezultate. Alternativno, mogu se koristiti regularne i singularne analitičke perturbativne metode ako se problem može dovoljno dobro izolirati i aproksimirati kao „polu-zatvoren“ sustav. Stoga, ovdje se upoznajemo s osnovama mezoskalnih (i kasnije mikroskalnih) nestabilnosti koje bitno mijenjaju karakter strujanja fluida iz jednog u drugi režim.

Simetrična nestabilnost je jedina prava mezoskalna nestabilnost, tj. ona koja se u biti događa samo na mezoskali; ovaj pomalo nespretan naziv slijedi iz semigeostrofičke teorije koja je „simetrična“ i radi u 2D obzirom na x -os (zonalno) u usporedbi s kvazigeostrofičkom (3D) teorijom. Dakle, radi se o izvjesnoj vrsti 2D barokline nestabilnosti, uvjetno i kvalitativno rečeno. Ponekad se simetrična nestabilnost naziva opisno „nestabilnost na nagnutoj plohi“ („*slantwise instability*“), a vjerojatno najbolji naziv je njen puni naziv: izentropsko-inercijska nestabilnost. Dakle, simetrična nestabilnost objedinjuje na kvalitativno novi način pojam izentropske (u biti statičke) nestabilnosti i inercijske (barotropne) nestabilnosti. Postoji kompletna 3D semigeostrofička teorija (Cullen, 2006).

Ako se čest giba poprečno, tj. pod nekim kutem prema horizontali (a ne samo vertikalno ili samo horizontalno), moguće je da pod određenim uvjetima pomaci budu nestabilni, čak i ako su pojedinačni uvjeti za statičku i inercijsku stabilnost zadovoljeni. Ovakva nestabilnost se javlja samo kad postoji vertikalno smicanje horizontalnog vjetra i predstavlja poseban (2D) oblik barokline nestabilnosti.

Za lakše izvođenje uvjeta za simetričnu nestabilnost, opet se koristi Boussinesqova aproksimacija (kao u najvećem dijelu ove skripte!) i pretpostavlja se da je strujanje neovisno o x -koordinati. Srednji vjetar je usmjeren duž x -osi i u ravnoteži je s meridionalnim temperaturnim gradijentom:

$$f \frac{\partial u_g}{\partial z} = -\frac{\partial b}{\partial y} = -\frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \theta}{\partial y}, \quad (1)$$

gdje je θ_0 konstantna referentna vrijednost potencijalne temperature, $\theta_0(z_s)$ izabrane na referentnoj visini z_s a ostale su oznake kao i prije (ili trivijalno očite), b je uzgon. Stabilnost se ispituje preko raspodjele totalne potencijalne temperature $\theta = \theta_0 + \Theta$ i apsolutnog zonalnog impulsa

$$M = fy - u_g, \quad (2a)$$

gdje je $\frac{\partial M}{\partial y} = f - \frac{\partial u_g}{\partial y}$ apsolutna zonalna vrtložnost. Za barotropno strujanje izentrope su orijentirane horizontalno, a plohe spomenutog impulsa vertikalno u meridionalnoj ravnini. Iznosi

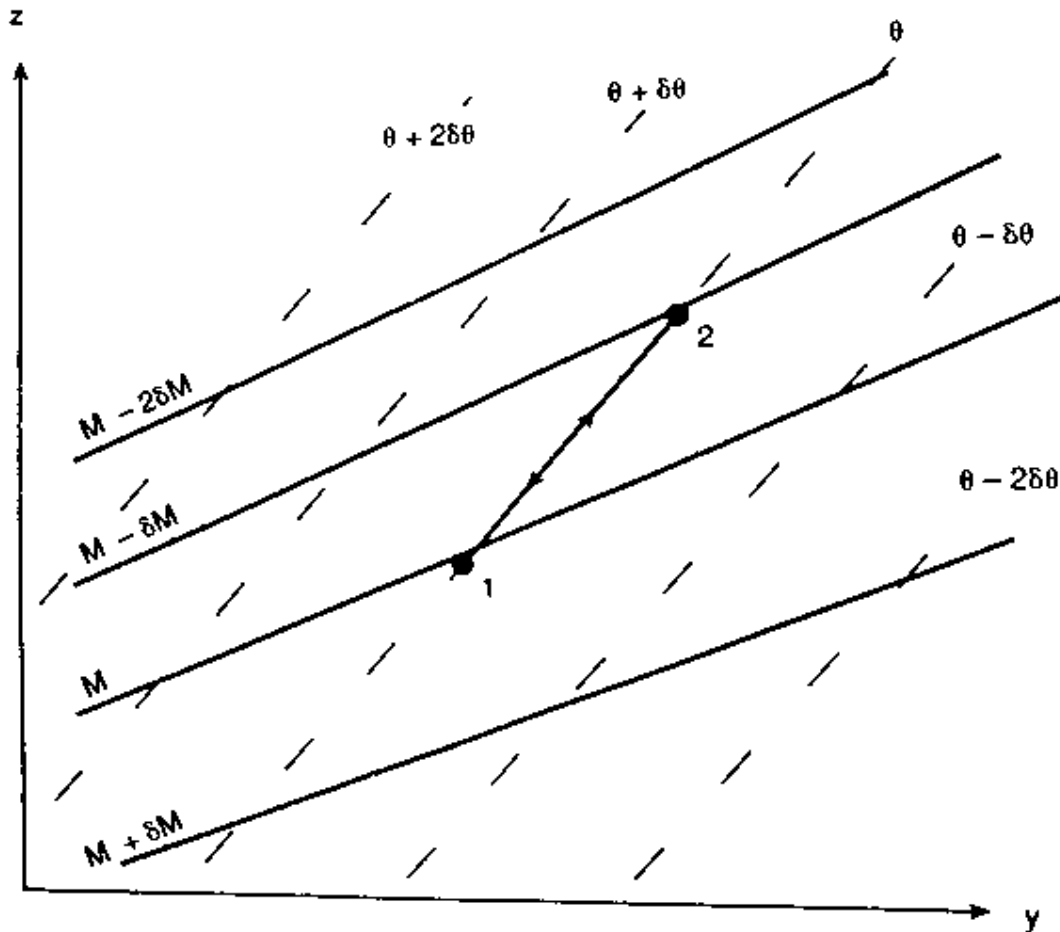
vertikalnih i horizontalnih forsiranja u troposferi umjerenih širina dani su omjerom $\frac{N_s^2}{\left(f \frac{\partial M}{\partial y}\right)}$ i za

tipične troposferske uvjete ovi iznose $\sim 10^4$.

Stabilnost ovisi o relativnom nagibu spomenutih θ i M ploha. Obično su M plohe nagnutije (vertikalnije) od θ ploha (horizontalnije) i pomaci česti su u prosjeku stabilni. No, kad su θ plohe strmije nagnute, Slika 2.1, tako da je

$$f \left(\frac{\partial M}{\partial y} \right)_\theta < 0, \quad (2b)$$

pa je strujanje nestabilno; faktor f u (2) ne mijenja smisao ovog kriterija, a potreban je u daljem tumačenju. Ova nestabilnost se na Sl. 2.1 vidi po tome što su M -plohe zakrenute u smjeru kazaljke na satu (pravilo lijeve ruke), tj. negativno, obzirom na θ -plohe. Ovo je česta pojava u području jakih horizontalnih temperaturnih gradijenata, slabe vertikalne stabilnosti i nerijetko velike relativne vlažnosti u zraku.



Slika 2.1 Ilustracija vertikalnog presjeka izolinija potencijalne temperature i impulsa za simetričnu nestabilnost. Gibanje duž izentropa između točki 1 i 2 je nestabilno jer pri adijabatičkom pomaku česti, ona je izložena spontanom usporavanju ili ubrzavanju svojeg okoliša; y os gleda k sjeveru a x os prema nama (Izvor: Holton 1992), M raste k polu. $\theta = \text{const}$ plohe su ovdje nagnutije, tj. strmije od $M = \text{const}$ ploha.

Povežimo sada princip ove nestabilnosti s fundamentalnim pojmom u dinamici geofizičkih fluida, potencijalnom vrtložnošću. Ako (2) pomnožimo s $-g\left(\frac{\partial\theta}{\partial p}\right)$, kriterij za simetričnu nestabilnost se može izraziti preko Ertelove potencijalne vrtložnosti u (x,y,p) sustavu, $P = (\zeta_\theta + f)(-g\partial\theta/\partial p) = const$. U jednostavnom obliku ova nestabilnost povlači da je $f\bar{P} < 0$ (stabilnost je za >0), gdje je \bar{P} potencijalna vrtložnost² (PV) osnovnog geostrofičkog strujanja. Kompletna 3D PV je dana skalarnim produktom vrtložnosti i gradijenta potencijalne temperature podijeljenim s gustoćom zraka. Ako je početna potencijalna vrtložnost (za sjevernu hemisferu) svugdje pozitivna, onda se simetrična nestabilnost ne može razviti kroz adijabatička gibanja, jer je tada vrtložnost očuvana i uvijek će ostati pozitivna.

Često se kriterij stabilnosti prikazuje preko Richardsonovog (gradijentnog) broja. Nagib M ploha može se procijeniti iz činjenice da vrijedi:

$$\delta M = \frac{\partial M}{\partial y} \delta y + \frac{\partial M}{\partial z} \delta z, \quad (3)$$

tako da je omjer δz i δy za konstantan M procijenjen iz (3) kao

$$\left(\frac{\delta z}{\delta y}\right)_M = \frac{\left(-\frac{\partial M}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial M}{\partial z}\right)} = \frac{\left(f - \frac{\partial u_g}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial u_g}{\partial z}\right)}. \quad (4)$$

Analogno, nagib izentropa je:

$$\left(\frac{\delta z}{\delta y}\right)_\theta = \frac{\left(-\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)}{\left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)} = \frac{\left(f \frac{\partial u_g}{\partial z}\right)}{\left(\frac{g}{\theta_0} \frac{\partial\theta}{\partial z}\right)}, \quad (5)$$

gdje je korištena relacija za termalni vjetar da bi se izrazio meridionalni temperaturni gradijent preko vertikalnog smicanja zonalnog vjetra.

Omjer nagiba ploha sad glasi:

² PV kombinira informaciju o rotaciji i stratifikaciji atmosfere lokalno i na jedinstven način. Kad nema trenja i izvora ili ponora topline, PV je konzervativna osobina česti zraka kako se ova giba na izentropskim plohama. Oslobađanje latentne topline u toku ~ jednog dana može dovesti do velikog porasta PV ispod maksimuma grijanja, ili pada PV iznad tog maksimuma grijanja. Radijativni efekti općenito mijenjaju PV jako sporo. Inače, PV uglavnom raste od ekvatora k polovima ($s \sim$ Coriolisovim parametrom) i s visinom (pad gustoće zraka i porast stratifikacije u stratosferi). Obično se mjeri u PV jedinicama (PVU); 1 PVU odgovara srednje-širinskoj apsolutnoj vrtložnosti 10^{-4} s^{-1} , pri gustoći od 1 kg m^{-3} a za porast θ od $\sim 10 \text{ K km}^{-1}$, što je između troposferskih i stratosferskih tipičnih vrijednosti. Na primjer, PV je obično 0.3 PVU u nižoj troposferi i 3 PVU u nižoj stratosferi.

$$\frac{\left(\frac{\delta z}{\delta y}\right)_M}{\left(\frac{\delta z}{\delta y}\right)_\theta} = \frac{f\left(f - \frac{\partial u_g}{\partial y}\right)\left(\frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \theta}{\partial z}\right)}{\left[f^2 \left(\frac{\partial u_g}{\partial z}\right)^2\right]} = \frac{F^2 N_s^2}{S^4}, \quad (6)$$

gdje je kao i prije $F^2 = f\left(f - \frac{\partial u_g}{\partial y}\right) = f \frac{\partial M}{\partial y}$, $N_s^2 = \frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \theta}{\partial z}$, $S^4 = f^2 \left(\frac{\partial u_g}{\partial z}\right)^2$. Ako je (6) > 1 , strujanje je stabilno, a ako je (6) < 1 , strujanje je nestabilno. Drugim rječima, simetrična nestabilnost zahtijeva da je nagib θ ploha veći od nagiba M ploha, pa nužan uvjet za nestabilnost osnovnog (geostrofičkog) strujanja paralelnog s osi x postaje:

$$\frac{\left(\frac{\delta z}{\delta y}\right)_M}{\left(\frac{\delta z}{\delta y}\right)_\theta} = \frac{f\left(f - \frac{\partial u_g}{\partial y}\right)R_i}{f^2} = \frac{F^2 N_s^2}{S^4} < 1 \quad (7)$$

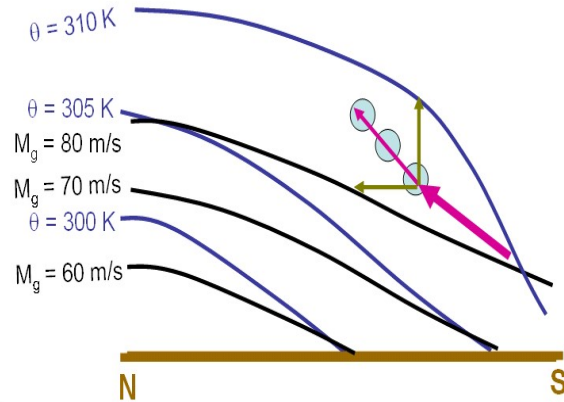
gdje je Richardsonov gradijentni broj definiran kao

$$R_i \equiv \frac{\left(\frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \theta}{\partial z}\right)}{\left(\frac{\partial u_g}{\partial z}\right)^2} \quad (8)$$

i θ_0 je opet u stvari referentni $\theta_0(z_s)$. Dakle, ako relativna vrtložnost srednjeg strujanja iščezava ($\frac{\partial u_g}{\partial y} = 0$) ili je puno manja od f , onda $R_i < 1$ označava nestabilnost, što je izuzetno važan dijagnostički i kratkoročno-prognostički kriterij za skoro svaku atmosfersku nestabilnost u npr. avijaciji (u ovoj skripti ćemo se susresti s nekoliko formi Richardsonovog broja). Nadalje, (8) predstavlja kvadrat omjera dvije važne frekvencije: uzgonske i geostrofičko-smicajuće. Alternativno, to je omjer kvadrata dviju vremenskih skala: karakterističnog trajanja vertikalnog smicanja geostrofičkog vjetera i trajanja uzgonske oscilacije. Za simetričnu nestabilnost tada mora vrijediti zbog (6)

$$F^2 N_s^2 - S^4 < 0. \quad (9)$$

Izraz (9) u uskoj je vezi s karakterom jedn. (14) prošlog poglavlja. Slika 2.2. prikazuje slučaj duboke mokre konvekcije koji je vjerojatno bio uzrokovan simetričnom nestabilnošću.



Slika 2.2 Primjer gotovo eksplozivnog početka simetrične nestabilnosti. Fotografija (lijevo) ilustrira nagnuto podizanje mokrih i relativno toplih česti zraka pri simetričnoj nestabilnosti. Iznos apsolutnog zonalnog impulsa (desno) je označen M_g (crne, tamnije krivulje) a podizanje česti je ilustrirano strelicom kroz osjenčane kružnice; N i S ilustriraju tipičan položaj sjevera i juga (Izvor: internet). Mada na slici M_g ima suprotan predznak nego u tekstu ima M , ovdje to, zbog promatranja omjera dviju derivacija, vidi (4), ne igra nikakvu ulogu.

Bitno je spomenuti da uvjet za stabilnost, $F^2 N_s^2 - S^4 > 0$, predstavlja eliptički problem (opet vidi (14) u prošlom poglavlju), što je analogno Sawyer-Eliassenovoj jednačbi koju smo sreli u prvom poglavlju:

$$N_s^2 \frac{\partial^2 \psi_M}{\partial y^2} + F^2 \frac{\partial^2 \psi_M}{\partial z^2} + 2S^2 \frac{\partial^2 \psi_M}{\partial y \partial z} = 2Q_2, \quad (10)$$

gdje je Q_2 opet samo y -komponenta \vec{Q} vektora (tj. Q_2 je ovdje proporcionalan pravoj pripadnoj komponenti tog vektora), koji je pak poopćenje tzv. frontogenetičke funkcije. Na ovaj način vidimo vezu između primjenjene i numeričke matematike s jedne strane (rješavanje konkretne parcijalne diferencijalne jedn.), teorijske meteorologije (prepoznavanje i tumačenje prirode nestabilnosti) i praktične meteorologije (prognoza i dijagnoza područja s $Ri < 1$). Standardni udžbenici iz numeričke prognoze vremena tumače iterativne metode rješavanja (10); mi ih dotičemo na vježbama iz Dinamičke meteorologije. Eliptička parcijalna diferencijalna jedn. poput (10) ima dvije kompleksno konjugirane karakteristike, a u slučaju da je hiperbolička (poput valne jedn.), onda bi imala dvije realne karakteristike (u 1D: $f(x \pm ct)$); konačno, da je parabolička, imala bi samo jednu realnu karakteristiku (u skladu s npr. 2. zakonom termodinamike i općeg prosječnog porasta entropije, tj. bez povrata u organiziranije stanje sustava). Ako pak (10) mijenja koeficijente i karakter u promatranom području, onda se radi o mješovitom tipu pripadne jednačbe; u slučaju da npr. N_s ili F^2 promijene predznak u domeni, predznak od (9) bi se također promijenio unutar domene i to bi značilo da je tada (10) mješovitog tipa.

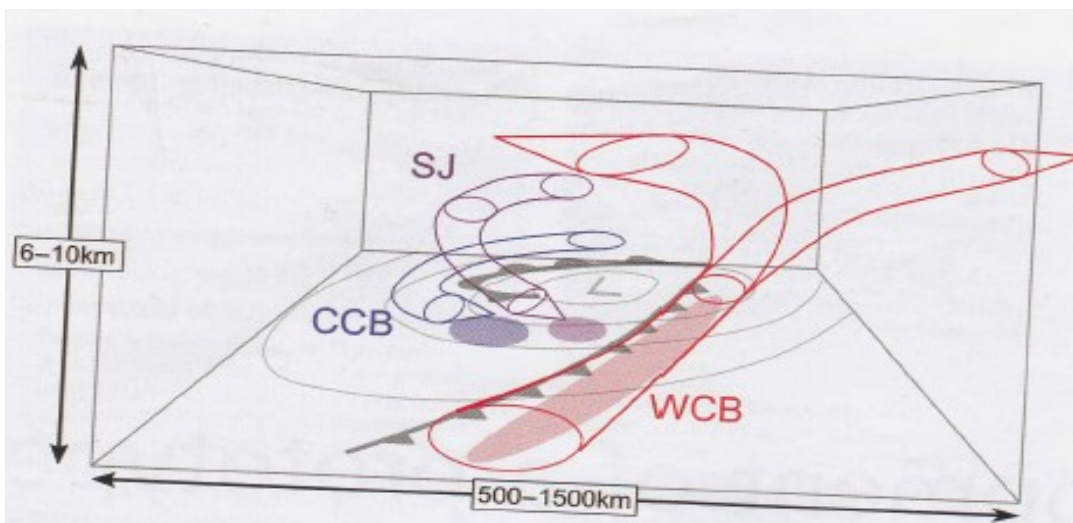
Treba biti očita veza između ovog i prošlog poglavlja skripte; nadalje, postupno postaje jasno da se većina korištenog matematičkog aparata osniva na parcijalnim diferencijalnim jednačinama. Ponovimo još jednom: 1) valni (općenito disperzivni) problemi su opisani hiperboličkim parcijalnim diferencijalnim jednačinama, 2) stacionarni problemi (npr. 'stacionarna' meridionalna cirkulacija) su karakterizirani eliptičkim parcijalnim diferencijalnim jednačinama, dok 3) difuzivni procesi (tipični granični slojevi, jednostavni prijenos topline, itd.) su opisani paraboličkim parcijalnim diferencijalnim jednačinama. Nadalje, još ćemo se nekoliko puta susresti s kriterijima nestabilnosti različitih tipova strujanja vezanim uz Richardsonove brojeve, tipa (8), i pripadnim eventualnim „kritičnostima“ kao što smo se susreli u ovom poglavlju.

Još jednom, ključna činjenica za mogućnost pojave simetrične nestabilnosti je veća nagnutost M ploha u odnosu na θ -plohe. To se najčešće svodi na postojanje jakog meridionalnog temperaturnog gradijenta.

Ako se malo izgubite prelazeći sa sinoptičke na mezoskalu, prateći ove jednačine izvedene i prikazane do sada, prisjećajući se osnovnih sinoptičkih frontogenetičkih situacija (mapa ili karata) - ovdje prvenstveno proučavamo razvoj ulaznog zapadnog mlaznog strujanja u polju jakog meridionalnog temperaturnog gradijenta. To je poput spljoštenog lijevka što je s jedne (južne) strane topao, a s druge (sjeverne) strane hladan; meridionalna širina mu je ~ 500 km a duljina ~ 2000 km. Ovim dijelom skripte postupno prelazimo sa (sub)sinoptičke na („pravu“) mezoskalu.

b) Topli i hladni pojasevi, niska ubodna mlazna struja i Shapiro - Keyser-ov model ciklone

Ciklogeneza i posebice frontogeneza su kompliciraniji procesi u prirodi, nužno 3D, nego što ih prikazujemo i tumačimo u nastavi. Kao napomena i ilustracija, Slika 2.3 skicira razvoj ciklone tj. model, i donekle fronte, prema tzv. Norveškoj školi, pa do modela Shapiro-a i Keyser-a (npr. Clark i Gray, 2018).



Slika 2.3 Prikaz 3D izvantropske ciklone prema modelu Shapiro-Keysera. Pored uobičajenih fronti, postoje topli i hladni pojas, WCB i CCB, te tzv. *Sting Jet*, SJ, tip niske mlazne struje, koja je žestoka, tj. 'ubodna' subsinoptička struktura vjetra i prati odozgo hladnu frontu (slika od Clark i Gray, 2018).

U doba klasičnog razvoja modela izvantropske ciklone, nije bilo regularnih sondaža, a kamo li radara i statelita; stoga je pripadni teorijski model bio razvijen prvenstveno na osnovi površinskih mjerenja. Idealizirani model izvantropske razvijene ciklone prikazuje donji dio Slike 2.3. Bitni ostali elementi ciklone su topli i hladan pojas na visini te nerjetka pojava tzv. ubodne niske mlazne struje koja obično dotiče prizemni atmosferski sloj ispred hladne fronte. Ovo je prilog tumačenju da su ciklone, a onda i anticiklone, nužno 3D strukture koje se mijenjaju u vremenu.

3. UVOD U UZGONSKE VALOVE: IZMJENA ENERGIJE I IMPULSA

Valovi su netrivialna rješenja lineariziranih Navier-Stokesovih (NS) jednažbi. Na velikoj, planetarnoj skali, spomenimo pripadne Rossbyjeve valove. Poznavanje valova pomaže tumačenju mezoskalnih pojava, kratkoročnoj prognozi te općem pristupu numeričkom modeliranju. Pretpostavlja se da studenti već imaju uvid u osnove valne mehanike. Ovdje ćemo samo ukratko prvo ponoviti nekoliko važnih pojmova i činjenica o valovima. Neki od mnogobrojnih detalja se mogu pronaći u Acheson (1990), Kundu i Cohen (2002), Nappo (2002) te posebice Linu (2007), itd.

Fazna i grupna brzina

Valovi u atmosferi su periodički poremećaji u polju atmosferskih varijabli (npr. površinski tlak, geopotencijalna visina, gustoća...). Oni mogu propagirati ili biti stacionarni, a u svojoj vremenskoj i prostornoj skali mogu varirati od dugoperiodičkih planetarnih valova (Rossbyjevi valovi) pa sve do kratkih akustičkih valova. Kod propagirajućih valova frekvencija ν ovisi o valnom broju k , kao i svojstvima samog medija kroz koji se val širi. Relacija koja povezuje ν sa k zove se *dispersion relation*. U općenitom slučaju fazna „brzina“ (*phase speed*) vala, definirana kao $c = \nu / k$, ovisi o valnom broju k . Ovo ima iznimku u posebnom slučaju kada $\nu \propto k$ pa su valovi nedisperzivni (npr. linearni valovi na plitkoj vodi).

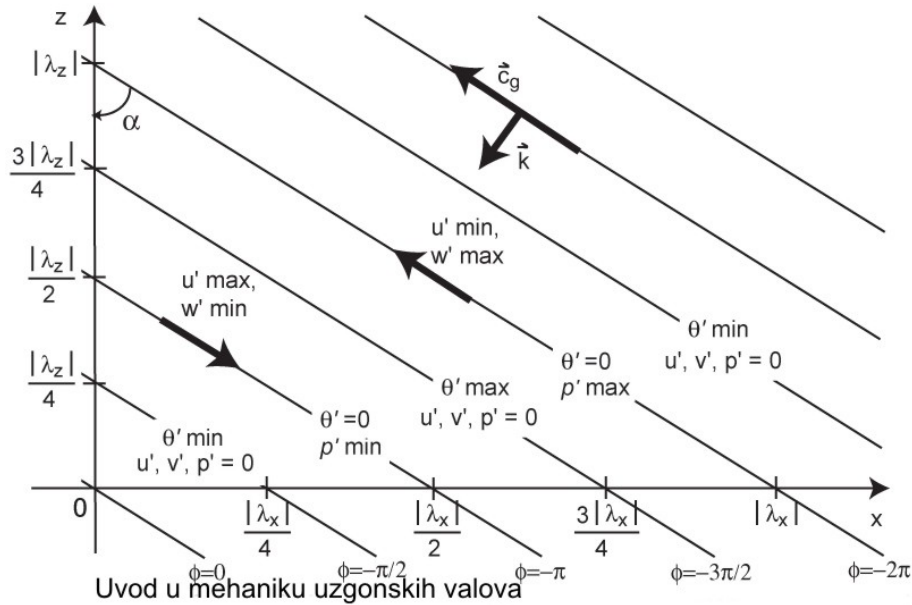
Kod valnih paketa sastavljenih od valova čija fazna brzina ovisi o k , nakon određenog vremena različite sinusoidalne komponente od kojih je paket sastavljen više neće biti u fazi. Zbog toga nema pozitivne interferencije između komponenti, koja je stvarala taj valni paket, tj. valni paket ne zadržava svoj prvotni oblik nego se raspršuje. Takvi valovi zovu se *dispersivni*. Valni se paket kroz prostor kreće grupnom brzinom (*group velocity*) koja je definirana za x -komponentu kao:

$$c_g = \pm \frac{\partial \nu}{\partial k}.$$

To je brzina kojom se „geometrijski uzorak“, tj. valni paket energije koji val čini kreće kroz prostor. Ovisno o samom izrazu za frekvenciju, u izrazu za grupnu brzinu se koristi pozitivan ili negativan predznak. Istom brzinom valni paket prenosi i energiju a slično se definira i za ostale komponente grupne brzine u N -dimenzijskom prostoru (dakle, to su komponente gradijenta frekvencije u prostoru valnih brojeva, $c_{g,j} = \pm \frac{\partial \nu}{\partial k_j}$). Neke vrste valova (npr. akustički valovi,

valovi na plitkoj vodi) imaju faznu brzinu koja ne ovisi o valnom broju. Kod takvih, nedisperzivnih valova, valni paket (ili grupa) koji se sastoji od brojnih valnih komponenti će očuvati svoj oblik dok propagira prostorom. Samo kod nedisperzivnih valova vrijedi $c_{fazna} = c_{grupna}$. Inače, to nije općeniti slučaj. Nadalje, prisjetimo se da fazna brzina („*speed*“) nije vektor, dok grupna („*velocity*“) jest; stoga i razlika u engleskom jeziku kod tipa brzine a koja se ne vidi u hrvatskom jeziku. Spomenimo da je tzv. valna sporost („*wave slowness*“), $1/c_{fazna}$, vektor; brojnik mu je proporcionalan vektoru valnog broja. Naravno, za valnu sporost vrijede pravila za zbrajanje vektora i ostalo iz vektorske algebre.

Značajan dio teorijske meteorologije i oceanografije bi se mogao nazvati 'valna dinamika geofizičkih fluida'. Vjerujemo da će to postati jasno tokom i nakon nekoliko sljedećih poglavlja.



Slika 3.1 Ilustracija valne duljine, valnog vektora, grupne (vektorske) brzine i tipičnog faznog pomaka valnih fronti pojedinih perturbiranih polja (Izvor: internet).

Uvod u dio osnovne valne mehanike, poznat iz ranijih kurseva, nalazi se na Slici 3.1.

Kako nedisperzivni valovi čuvaju oblik tijekom gibanja, energija koju nose ostaje jednako koncentrirana, odnosno gusta. To nije slučaj sa disperzivnim valovima gdje se zbog raspršenja valnih paketa, energija koju valni paket prenosi postupno širi na sve veći prostor pa se pripadna gustoća energije smanjuje.

Izmjena energije i impulsa u stratificiranim fluidima

Promatramo trodimenzijski (3D), neviskozni, nestlačiv i adijabatički Boussinesqov fluid (zbog matematičke jednostavnosti su uvedene ove pretpostavke, mada nema linearizacije). Pretpostavimo li i da su gibanja u geofizičkom fluidu na takvoj vremenskoj i prostornoj skali da možemo uzeti da je $f = \text{const}$, osnovne jednačbe u (x, y, z) sustavu postaju:

$$\frac{Du}{Dt} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} - fv = 0 \quad (1a)$$

$$\frac{Dv}{Dt} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + fu = 0 \quad (1b)$$

$$\frac{Dw}{Dt} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - g \frac{\theta}{\theta_0} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{D\theta}{Dt} + w \frac{d\theta_0(z)}{dz} = 0. \quad (3)$$

Jednačbe (1) i (2) su jednačbe gibanja, dok je (3) jednačba termodinamike. Pomnožimo li (1) s komponentama brzine u, v , (2) s vertikalnom komponentom brzine w , te (3) s članom $a\theta$, gdje je θ potencijalna temperatura a a je za sada neodređeni dimenzijski koeficijent proporcionalnosti, te zbrojivši $u(1a)+v(1b) + w(2) + a\theta(3)$ dobivamo:

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + a \frac{\theta^2}{2} \right) + \frac{1}{\rho_0} \left(u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} \right) + w \theta \left(a \frac{d\theta_0}{dz} - \frac{g}{\theta_0} \right) = 0. \quad (4)$$

Ako znamo da je kinetička energija (po jedinici mase) definirana kao $K = (u^2 + v^2 + w^2)/2$, a potencijalna kao $P = a\theta^2/2$, $E = K + P$, očito je da prvi član u (4) predstavlja potpunu promjenu ukupne energije sustava; očito da a nije proizvoljan te da ima dimenzije $m^2 s^{-2} K^{-2}$. Nagađamo iz (4) da će imati smisla da a baš bude takav da zadnja zagrada u (4) isčezava. Drugi član, tj. drugu zgradu u (4) možemo napisati kao

$$u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} = \nabla \cdot (p\vec{V}) - p \nabla \cdot \vec{V}$$

i pritom je drugi član na desnoj strani jednak nuli zbog nestlačivosti (Boussinesqovog) fluida; ovime smo napisali 3D advekciju gradijenta tlaka u tzv. „fluks-formi“, što može biti vrlo važno pri formuliranju (posebice numeričkih) modela i provjere njihovih integralnih osobina, tj. različitih očuvanja u pripadnom modelu. Uz navedene preinake, jednačba (4) izgleda ovako:

$$\frac{DE}{Dt} + \frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot (p\vec{V}) + w \theta \left(a \frac{d\theta_0}{dz} - \frac{g}{\theta_0} \right) = 0. \quad (5)$$

Jednačbu (5) integriramo po zatvorenom prostoru (u principu N-dimenzijskom, ali ovdje zbog jednostavnosti to je samo 3D) s nepropusnim rubovima što znači da komponenta brzine okomita na rubove mora biti jednaka nuli, tj. $\vec{V} \cdot \hat{n} = 0$.

$$\iiint \frac{DE}{Dt} dx dy dz + \frac{1}{\rho_0} \iiint \nabla \cdot (p\vec{V}) dx dy dz + \iiint w \theta \left(a \frac{d\theta_0}{dz} - \frac{g}{\theta_0} \right) dx dy dz = 0 \quad (6)$$

Drugi član u (6) integriramo pomoću teorema Gauss-Ostrogradskog. U 2D slučaju se ovaj teorem ponekad naziva i 'Eksport teorem', jer opisuje unos/iznos određenog svojstva, ovdje konkretno, produkta tlaka i brzine, odnosno u 2D slučaju bi koristili osobinu da je:

$$\oiint \nabla \cdot (p\vec{V}) d\vec{A}_{3D \rightarrow 2D} \Rightarrow \oint p\vec{V} \cdot d\vec{l}_{2D \rightarrow 1D} = \oint p\vec{V} dl \cdot \hat{n}, \quad (7a)$$

a u 3D:

$$\iiint \nabla \cdot (p\vec{V}) dV = \oiint p\vec{V} \cdot d\vec{A} \quad (7b)$$

gdje je $d\vec{l}$ vektorska komponenta od elementa površine $d\vec{A}$ koja gleda iz prostora, dok je \hat{n} jedinični vektor koji također gleda iz promatranog prostora (nemojte zamijeniti $d\vec{l}$ sa sličnim u cirkulaciji); (7) je nula zbog uvjeta na brzinu uz rubove, tj. da nema rupa u prostoru kroz koji bi fluid ulazio ili izlazio. Ovaj ste teorem susreli u elektromagnetizmu računajući divergenciju električnog polja; teorem je povezivao 3D i 2D; ovdje vidimo iz (7a) da može djelovati i u manje dimenzija, tj. 2D \leftrightarrow 1D. Isto bi vrijedilo i u beskonačnom prostoru ako npr. brzina opada brže no što se promatrane točke približavaju beskonačnosti. Još nismo sasvim odabrali konstantu a u trećem članu jednačbe (4), odnosno u (5) i (6). Pogodno je odabrati za $a = \frac{g}{\theta_0} \frac{1}{\frac{d\theta_0}{dz}}$, time je i

uvjet za dimenziju od $[a] = m^2 s^{-2} K^{-2}$ ispunjen, kao i konstantnost; nadalje, $a = [g/(\Theta_0 N)]^2$. Ovakvim odabirom a , treći član u (6) postaje jednak nuli što ima fizikalnog smisla jer dovodi do

očuvanja energije u neviskoznom nestlačivom adijabatičkom fluidu u zatvorenom prostoru. Prema tome, dobili smo iz (6) da je $\frac{D\bar{E}}{Dt} = 0$, odnosno srednja energija ostaje očuvana u vremenu za promatrani fluid u proizvoljnom prostoru uz odabrane razumne rubne uvjete.

U slučaju kada ne integriramo (5), onda 2. član $\nabla \cdot (p\vec{V})$ preostaje i predstavlja tok (fluks) energije. Tada (5) glasi:

$$\frac{DE}{Dt} + \frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot (p\vec{V}) = 0. \quad (8a)$$

To fizikalno znači da ako postoji lokalna promjena energije u sustavu i desna strana ne bi bila nula, onda moraju postojati lokalni ponori ili izvori energije; inače, energija je očuvana. Nadalje, lokalno, $DE/Dt \neq 0$ općenito, jer $\nabla \cdot (p\vec{V}) \neq 0$ općenito na nekom mjestu (npr. kraj mikrobarografa i anemometra), tj. postoji koherentna (konstruktivna ili destruktivna, ali svakako sustavna) interferencija između poremećaja tlaka i vjetra koja gura energiju kroz prostor pa tako i uz mjerne uređaje. Taj prijenos energije putuje grupnom brzinom; za (8a) isto vrijedi:

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot ((p/\rho_0 + E)\vec{V}) = 0, \quad (8b)$$

gdje brzina smije biti i ispred prostornog diferencijalnog operatora jer je ovdje nedivergentna. Sve jednadžbe ovog poglavlja dobivene su iz osnovnih jednadžbi očuvanja i nigdje nije posebno rečeno da se radi samo o valovima. Stoga se ovo može odnositi i na valu-slične poremećaje. Izraz (8b) se dalje može povezati s tzv. Poyntingovim vektorom i tokom energije, važnim pojmom u teorijskoj fizici.

Konačno ako pomnožimo (3) s θ , dolazimo do značenja toka potencijalne temperature:

$$\frac{D\theta^2/2}{Dt} + w\theta \frac{d\theta_0}{dz} = 0. \quad (9)$$

Ako je $w\theta < 0$, onda 1. član u (9), koji predstavlja lokalnu promjenu potencijalne energije po jedinici mase, mora biti pozitivan tj. dolazi do pretvorbe kinetičke u potencijalnu energiju. I obrnuto, za $w\theta > 0$ dolazi do porasta kinetičke energije a na uštrb opadanja potencijalne energije. Stoga, $w\theta$ predstavlja konverziju energije i u prosjeku treba biti jednak nuli.

Primjetimo da promatrani sustav ovdje nije bio lineariziran. Kasnije ćemo pokazati da ako je bit promatrane dinamike u barem približno linearnim uzgonskim valovima, tj. ako su oni osnovni mehanizam u promatranom prostoru, onda oni neće moći prenositi toplinu s jednog mjesta na drugo, već samo impuls, kinetičku energiju i tzv. valnu napetost (uvjetno 'valni otpor', ili 'valno potezanje'), tj. kovarijancu dviju valnih komponenata brzine, npr. u i w . Nadalje, jedna od glavnih osobina uzgonskih valova, za razliku od npr. turbulencije, je da ovi valovi mogu prenositi energiju kroz fluid na veliku daljinu.

Sličnu dekompoziciju promatranih polja strujanja na osnovno stanje plus perturbacija ćemo često koristiti. Prvo će nam perturbacije biti valovi (deterministički signal), a kasnije u skripti biti će to turbulentne (uglavnom slučajne) fluktuacije. Ovakav je pristup općenit i prilično jak, teorijski gledano, jer može uvažavati i nelinearne procese. Inače, do sada je već bilo naučeno iz prethodnih kolegija da je princip očuvanja energije jedan od najbitnijih i najjačih principa fizike.

4. UZGONSKI VALOVI

Nastavljamo proučavanje mezoskalnih mehanizama fokusirajući se na linearne uzgonske valove, te kasnije na njihovo prirodno vremensko-prostorno 'produljenje' u uzgonsko-inercijske valove, odnosno 'smanjenje' u Kelvin-Helmholtzove valove. Ova izjava vrijedi kvalitativno, obzirom na vremensko-prostornu skalu, ali ne i za mehanizme koji su im različiti. Valovi na mezoskali su važni jer predstavljaju jednostavan koncept dijagnoze stanja i kratkoročne prognoze atmosfere, jer predstavljaju mehanizme promjena između velike i male skale, nerjetki su uzrok okidanja drugih pojava (npr. konvekcije) i jer predstavljaju rješenja lineariziranog sustava koji opisuju atmosferu i more. Ovdje ćemo raditi pojednostavljeno i analitički ono što čine meteorološki modeli detaljnije i numerički: integrirati ćemo parcijalne diferencijalne jednadžbe osnovnog sustava gibanja i termodinamike a sve za zadane rubne i početne uvjete. Najveći dio ove lekcije se osniva na linearnoj valnoj teoriji.

Jednadžbe za težinske (uzgonske) valove izvodimo iz Eulerovih jedn. gibanja (tj. Navier-Stokesove jedn. (NS) i termodinamička jednadžba bez viskoznosti) za pojednostavljenu atmosferu bez rotacije i trenja; opet polazimo od očuvanja impulsa, mase i energije (uz već standardnu nam Boussinesqovu aproksimaciju). Ovdje izvodimo tzv. Taylor-Goldsteinovu jednadžbu čijom diskusijom ćemo naučiti o vjerojatno najglavnijim valnim gibanjima na mezoskali. Opet polazimo od 2D jedn. gibanja, kontinuiteta i adijabatičke jedn. termodinamike; sustav je za početak nelinearan i nerotirajući.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + g = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

Slijedi linearizacija ovog sustava oko osnovnog stanja sa srednjim vjetrom u_0 i srednjom stratifikacijom kao funkcijama visine; ona vrijedi ako je jedna vrsta Froudeovog broja, $Fr = U/(Nh) \gg 1$, gdje su U i N osnovni vjetar (ovdje u_0) i uzgonska frekvencija dok je h visina prepreke. Neporemećena atmosfera je u hidrostatičkoj ravnoteži. Drugim rječima, maksimalna visina terena i statička stabilnost moraju biti relativno mali da bi ovdje linearizacija vrijedila. Lineariziramo prema obrascu da je za polje q , $q(x,z,t) = q_0(z) + q'(x,z,t)$ zanemarujući produkte perturbacija, $(\)'$, te da nema srednje vertikalne brzine (zbog jednostavnosti, inače treba uvažiti npr. supsidenciju). Konačno, za perturbacije prestajemo pisati crtice:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{du_0}{dz} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u_0 \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\theta}{\theta_0} g = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \theta}{\partial x} + w \frac{\partial \bar{\theta}(z)}{\partial z} = 0. \quad (8)$$

To je sustav od 4 jedn. s 4 nepoznata polja. Da smo napisali iza (1) i pripadnu jedn. za v-komponentu strujanja, radilo bi se o 3D strujanju i završili bi na 5 jedn. s 5 nepoznatih polja. Pretpostavimo valna rješenja za sva 4 polja (u, w, p, θ) koja imaju amplitude označene 'kapa':

$$(u, w, p, \theta) = \text{Re} \left[\left(\hat{u}, \hat{w}, \hat{p}, \hat{\theta} \right) \exp[i(kx + mz - \omega t)] \right], \quad (9a)$$

ili alternativno, da su i valne amplitude funkcije visine (bolji izbor u slučaju kad srednji vjetar varira visinom):

$$(u, w, p, \theta) = \text{Re} \left[\left(\hat{u}(z), \hat{w}(z), \hat{p}(z), \hat{\theta}(z) \right) \exp(ik(x - ct)) \right]. \quad (9b)$$

Da smo pojednostavili sustav (5) do (8) tako da je $u_0 = \text{const}$, mogli bismo uvrstiti (9a) u taj homogeni sustav čija determinanta mora biti nula da bi postojala netrivialna rješenja tog sustava. Ta bi nas determinanta vodila do disperzijske relacije (općenito opisuje interne tj. svojstvene osobine sustava) i taj postupak provodimo u sljedećoj lekciji o uzgonsko-inercijskim valovima. Ovdje prvo svodimo (5) do (8) na jednu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu 4. reda bez uvrštavanja (9a), što se za vježbu može naknadno učiniti i tako dobiti spomenuta disperzijska relacija te izraz za faznu i grupnu brzinu ('*phase speed & group velocity*'). Dakle, (5) do (8) se svodi na sljedeće (tretirajući privremeno $\Delta \equiv \partial/\partial t + u_0 \partial/\partial x$ kao linearni diferencijalni operator kojim se može množiti i dijeliti u ovom posebnom slučaju jer ovdje to nije vektor):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 (\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial z^2) w + N^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad (10a)$$

što općenito nije lako riješiti za zadane rubne i početne uvjete, no tome se doskoči tako da se pretpostavi oblik rješenja (9a) kao što je već rečeno. Da smo rješavali sličan ali 3D valni (hiperbolički) sustav, uz $f \neq 0$, a npr. bez srednjeg vjetra, tj. $u_0 = 0$, onda bi došli do sustava za nehidrostatičke rotirajuće valove:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2) w + f^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + N^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (10b)$$

Oдавде slijedi pripadna disperzijska relacija uvrštavanjem 3D forme od (9a) za pripadni w :

$$\omega^2 = \frac{N^2(k^2 + l^2) + f^2 m^2}{k^2 + l^2 + m^2}, \quad (10b, *)$$

Ekvivalentna relacija je i u Pogl. 5, jedn. (18b). Kad bi postojao srednji vjetar u x - i y -smjeru, 2. derivacija po vremenu na lijevoj str. od (10b) bi prešla u $(\partial/\partial t + u_0 \partial/\partial x + v_0 \partial/\partial y)^2$, dok bi ostatak linearnog diferencijalnog operatora ostao isti.

Nadalje, pretpostavimo li valjanost lineariziranog donjeg rubnog uvjeta $w = u_0 \partial h / \partial x$, gdje osnovni vjetar puše samo niz x -os, fiksirajući koordinatni sustav uz zadani teren $h(x,y)$ i stacionarno strujanje preko planine, onda jedn. za pomake česti $D\eta(x,y,z)/Dt = w$ postaje,

$$u_0^2 \partial^2 / \partial x^2 \nabla_3^2 \eta + f^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2} + N^2 \nabla_H^2 \eta = 0, \quad (10c)$$

gdje za strujnicu na dnu strujanja vrijedi $\eta(x,y,z \approx 0) = h(x,y)$, nadalje indeksi iza laplasijena znače redom kompletan 3D i samo horizontalni laplasijen. Pretpostavimo li da je f zanemariv, te $\partial(\)/\partial y = 0$, dolazi se do jednostavnije pripadne jedn. za $\eta(x,z)$:

$$(\partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial z^2) \eta + (N / u_0)^2 \eta = 0, \quad (10d)$$

što opisuje linearne stacionarne nehidrostatičke nerotirajuće valove (uključujući i zavjetrinske valove). Kroz (10a) do (10d) vidimo da, ovisno o pretpostavkama, možemo izolirati različite (pod)vrste uzgonskih valova. Jednu vrstu takvih valova, tj. hidrostatičke stacionarne planinske valove proučavati ćemo uskoro u skripti. U takvom slučaju nestaju x -derivacije u (10d), pretpostavljeno rješenje može imati formu $\eta(x,z) = h_{\text{teren}}(x) \exp[iNz/u_0]$ i nakon računa za strujanje preko tzv. *Witch-of-Agnesi* planine dobija se $\eta(x,z) = h_0 \exp(iNz/u_0) / (1-ix/a)$, gdje je a poluširina planine (konačni oblik strujnice $\eta(x,z)$ dobija se uzimanjem realnog dijela zadnjeg izraza).

Vraćamo se sustavu (5) do (8) uz (9b). Dakle, nastavljamo s $f = 0$ i općenitijim slučajem gdje je $u_0(z)$. Probna rješenja (9b) uvrštavamo u jednadžbe (5) do (8), dijelimo sa zajedničkim im eksponentnim dijelom i prelazimo na pisanje običnim diferencijalom (koji je jedini preostao) radi jednostavnosti. Iz takvog sustava izlučimo sve amplitude osim \hat{w} , i tako dobijemo samo jednadžbu za amplitudu vertikalne komponente brzine, \hat{w} :

$$\frac{d^2 \hat{w}}{dz^2} + \left[\left(\frac{N}{c - u_0} \right)^2 + \frac{u_0''}{c - u_0} - k^2 \right] \hat{w} = 0. \quad (11)$$

To je uobičajeni oblik Taylor-Goldsteinove jednadžbe (TGE) za amplitude uzgonskih valova; prvi član predstavlja reakciju uzgona (glavni član), drugi je član zakrivljenosti profila vjetra i zadnji je nehidrostatički član. Očito da je (11) vrsta oscilatora koja određuje ponašanje (valnih) amplituda uzgonskih, tj. težinskih valova. U slučaju da je uglata zagrada u (11) konstantna, onda se radi o harmoničkom oscilatoru.

Sličan izraz vrijedi i uz anelastičku aproksimaciju, koja je općenito bolja od Boussinesqove jer dozvoljava srednje tj. osnovno opadanje gustoće, $\rho(z) = \rho_0 \exp(-z/H_s)$, gdje je H_s karakteristična dubina atmosfere (standardna troposfera), npr. $H_s \approx 8$ km. Da smo pošli od anelastičkog sustava (tipičan za tzv. starije regionalne NWP (*numerical weather prediction*) modele tipa Aladin i Hirnam³ a da bi ovi mogli akomodirati parametrizacije duboke konvekcije koja u principu nije dozvoljena u Boussinesqovoj, tj. plitkoj aproksimaciji), dozvoljena bi bila eksponencijalna ovisnost osnovne gustoće o visini i H_s bi bila karakteristična vertikalna skala atmosfere. Tada bi anelastički oblik Taylor-Goldsteinove jednadžbe (TGE) bio:

$$\frac{d^2 \hat{w}}{dz^2} + \left[\frac{N^2}{(c - u_0)^2} + \frac{u_0'}{c - u_0} - \frac{1}{H_s} \frac{u_0'}{c - u_0} - \frac{1}{4H_s^2} - k^2 \right] \hat{w} = 0$$

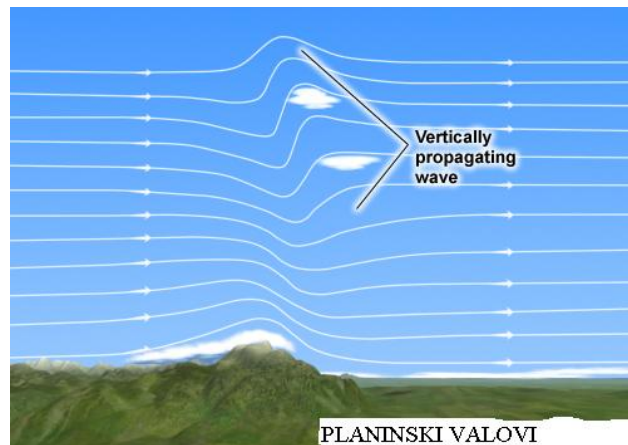
³ Aladin je regionalni NWP (*numerical weather prediction*) model iz 1990-ih god. i započeo je u Francuskoj. Sličan je Hirnamu, s fokusom na sjeverni i sjeverozapadni dio Europe. U DHMZ-u prvenstveno se koristi Aladin model za prognostičke i dijagnostičke svrhe, a postupno se uvodi u operativu pripadna nehidrostatička verzija, poboljšanje horizontalne rezolucije na oko 4 km i novije parametrizacije nerazlučenih procesa.

gdje je prvi član u zagradi uzgonski član, drugi je član zakrivljenosti profila vjetra, treći je član smicanja, četvrti član nema posebno ime i obično se uzima da je mali ispod tropopauze te se tad i zanemaruje; peti član je nehidrostaticki član. Zadnji se član prethodne jedn. neće pojaviti u izrazu ako su promatrane vertikalne perturbacije u hidrostatičkoj ravnoteži; to se provjerava npr. tako da se u (2) zanemare promjene od w te da se takav w dijagnosticira iz npr. jedn. kontinuiteta (ili neke druge prikladne osnovne jedn.). U plitkoj tj. Boussinesqovoj aproksimaciji trivijalno otpadaju 2 člana s H_s u zadnjem izrazu koji tad kolapsira u (11); ovi su članovi mjerili odstupanje od plitke atmosfere zbog eksponencijalne varijacije srednje gustoće visinom. Primijetimo da takva ovisnost gustoće zraka po visini zahtijeva da amplituda vala raste kao $\exp[z/(2H_s)]$, zbog očuvanja valne energije $\langle \rho u'^2 \rangle$, gdje je $\langle \dots \rangle$ prikladan srednjak; isto će vrijedjeti i za vertikalni prijenos impulsa (tj. komponente tzv. valne napetosti, $\langle \rho u'w' \rangle$) kad nema bitnih promjena u atmosferi.

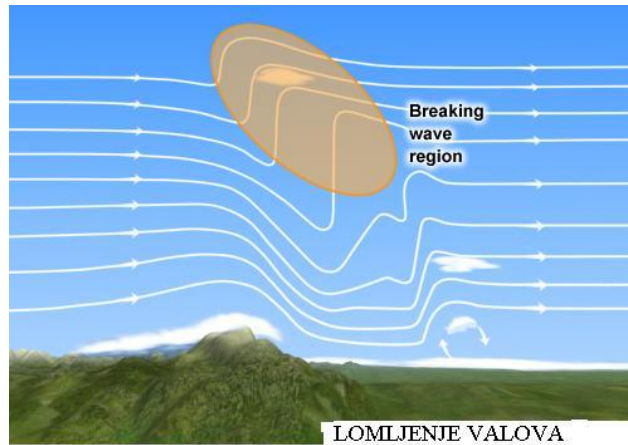
U slučaju stacionarnosti TGE iz (11) postaje

$$\frac{d^2 \hat{w}}{dz^2} + \left(\frac{N^2}{U^2} - \frac{U_{zz}}{U} - k^2 \right) \hat{w} = 0. \quad (12)$$

Napomenimo još jednom da je uobičajeno dozvoliti da profil vjetra ima i zakrivljenost (pored smicanja), dok za osnovnu stratifikaciju je dovoljno pretpostaviti da je ova linearna (radi jednostavnijeg matematičkog tretiranja promatranog sustava). Dobijeni izrazi od (11) do (12), njihova proširena anelastička verzija itd. su oblici valne jednačbe (Helmholtzovog tipa). Uz standardne rubne uvjete (npr. oblik planine da odgovara najnižoj strujnici i gornji tzv. radijacioni uvjet) koriste se i uobičajene analitičke ili numeričke metode za rješavanje problema uzgonskih valova. U hidrostatičkom strujanju konstantnih osnovnih profila strujanja U , $N = \text{const}$, u (12) preostaju samo 1. i 2. član, ukratko $\hat{w}'' + (N/U)^2 \hat{w} = 0$; odavde je očito da su promatrana valna ubrzanja uravnotežena prvenstveno silom uzgona. Slika 4.1 prikazuje vertikalno propagirajuće unutarnje uzgonske hidrostatičke valove velike amplitude.



Slika 4.1a. Ilustracija unutarnjeg hidrostatičkog planinskog vala (Izvor: COMET, internet).



Slika 4.1b. Prikaz velikog nelinearnog planiskog vala koji se lomi; takav val se ne može dobro opisati prikazanom linearnom valnom teorijom. U području lomljenja vala oslobađa se puno turbulentne energije. Vidi zadnju sliku u ovoj lekciji (Izvor: COMET, internet).

Ponovimo pretpostavke, prednosti, slabosti i posljedice ovakvog pojednostavljenog pristupa mezoskali i ovim pripadnim valovima:

- Nerjetko zanemarujemo utjecaj rotacije Zemlje i viskoznosti zraka.
- Osnovno stanje može biti usrednjeno strujanje, ali se još dodatno može i vertikalno mijenjati.
- Perturbacije su mnogo manje od osnovnog stanja i ne utječu na osnovno stanje (linearni sustavi su razumljiviji od nelinearnih).
- Gledamo samo perturbacije nastale zbog težinskih (uzgonskih) valova.
- Zanemarivanjem produkata valnih perturbacija poništavamo međudjelovanje valova (\Leftrightarrow linearizacija).
- Slabost: u realnoj atmosferi dolazi do 3D međudjelovanja valova i turbulencije.
- Linearna teorija je korisna i daje procjenu prvog reda za većinu valnih pojava (vidi kasnije).

Članovi u zagradi u (12) općenito variraju visinom (u stvarnosti i u vremenu, no to nije uključeno u (12)). Stoga su neki slojevi atmosfere više, a neki manje pogodni za propagiranje uzgonskih valova. Kad je spomenuta zagrada pozitivna u nekom većem dijelu atmosfere, tamo se mogu javljati tzv. unutarnji (interni) uzgonski valovi. Ako je pak $(N/U)^2 - d^2U/dz^2/U - k^2 > 0$ samo u nekom relativno malom dijelu atmosfere, a drugdje ≤ 0 , onda govorimo o tzv. zarobljenim („utrapljenim“; eng. „trapped“) valovima. Izvan tog valno-pogodnog područja, valovi se nalaze u prostoru slabije stabilnosti, i/ili prejakog srednjeg vjetera pa se ne mogu slobodno širiti; takvi se valovi ponekad nazivaju evanescentni (ili vanjski, tj. eksterni) valovi. Najjednostavnija vrsta vanjskih valova su valovi na plitkoj vodi. Slike 4.2 i 4.3 ilustriraju evanescentne (gore) i interne (dolje) valove. Spomenuti zarobljeni valovi nastaju konstruktivnom superpozicijom uzlaznih i silaznih valova koji su se djelomice reflektirali od nivoa gdje zagrada u (12) bitno mijenja iznos i predznak a time i smisao pripadne valne jednadžbe.

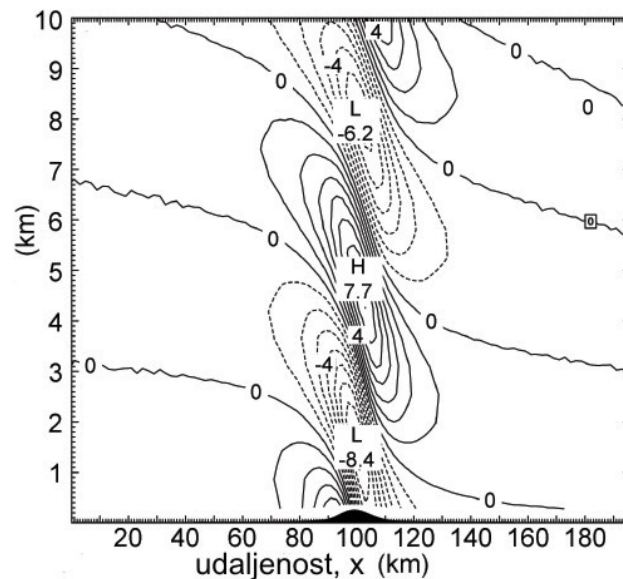
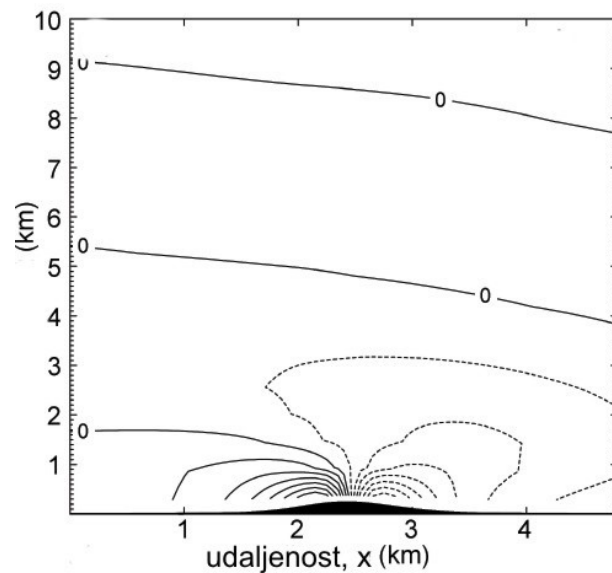
Ako je $|k| > N/U$ (jer $N > 0$ je nužno za pojavu uzgonskih valova) i primjenjujući tzv. gornji radijacioni rubni uvjet (nema refleksija valova od vrha modela, D , prema dolje; gotovo sasvim suprotan je npr. uvjet da na najvišoj dozvoljenoj visini u modelu je $w(D) = 0$), preostane samo vertikalno gušćea komponenta vala u polubeskonačno dubokom fluidu (atmosferi):

$$w(x, z) = Ae^{-\left(k^2 - \frac{N^2}{U^2}\right)^{\frac{1}{2}} z} e^{ikx} \quad (13)$$

i to fizikalno znači da je zbog prevelikog horizontalnog valnog broja terena, pripadna „brdovitost“ preintenzivna za atmosferu pa valovi visinom nestaju. Drugim rječima, tada atmosfera ne podržava ovakva valna gibanja. Ako je $|k| < N/|U|$, atmosfera dopušta valove i u visinu:

$$w(x, z) = Ae^{i \left[kx + \left(\frac{N^2}{U^2} - k^2 \right)^{\frac{1}{2}} z \right]} \quad (14)$$

i to su stacionarni unutarnji uzgonski valovi. Obje vrste valova su prikazane na Slici 4.2. Na vježbama tumačimo odabir eksponencijalnih faktora u (13) i (14) koji mogu sadržavati $(kx + mz)$ ili $(kx - mz)$, ovisno o odabiru predznaka (k, m) i fizikalno valjanog smjera putovanja valne energije. Razumno je birati isti predznak za k i m valne brojeve; nakon što se odluči odabir predznaka pojedinih članova u disperzijskoj relaciji, npr. (10b, *), jer su ove obično kvadratnog ili višeg reda, taj se odabir mora kasnije dosljedno poštovati i pratiti.



Slika 4.2 Evanescentni (gore) i unutarnji (dolje) uzgonski linearni val. Strujanje ide s lijeva u desno preko prepreke (brda) na dnu slike koje je ovdje dvostruko povećano nego što je u računu. Pozitivna vertikalna brzina je označena punim krivuljama, a negativna (silazna) je crtkana; $N = 0.02s^{-1}$, $u_0 = 20 ms^{-1}$. Uočite karakterističan nagib valnih fronti (Izvor: internet).

Time su valne fronte (konstantna faza vala) nagnute od planine ka gore unaprijed (znači ka gore i ulijevo na Sl. 4.2 (dolje)) obzirom na nadolazeći zrak a sam valni vektor gleda ili prema dolje lijevo, ili prema gore desno okomito na spomenute valne fronte. Obzirom da su uzgonski valovi primarno tjerani vertikalnim pomacima, onda je kod njih bitna divergencija; stoga su ovi valovi u prvj aproksimaciji bez rotacije (npr. Mesinger 1976, Holton 1992); to neće vrijedjeti za nelinearne valove, rotore i uzgonsko-inercijske valove. S druge strane valnih gibanja, na velikoj skali, Rossbyjevi valovi su u prvj aproksimaciji bezdivergentni, ali imaju rotaciju.

Izvođenjem disperzijske relacije koristeći (9a) pokazuje se da za tzv. intrinzičnu valnu frekvenciju (tj. 'Doppler-pomaknutu' frekvenciju) vrijedi

$$\tilde{\nu} = \nu - \bar{u}k = \pm \frac{Nk}{\sqrt{m^2 + k^2}} = \pm \frac{Nk}{|\bar{k}|} \quad (15)$$

gdje je opet $\bar{k} = k\bar{i} + m\bar{k}$ ukupni 2D valni vektor, dok je ν obična frekvencija a $\bar{u} = u_0 = U$. Jednostavno je pokazati da je u (15) desna strana jednaka N puta projekcija (kosinus kuta) valnog vektora na horizontalu; stoga je izraz uvijek manji ili jednak N . Računajući gradijent te relacije obzirom na taj valni vektor, slijede komponente grupne brzine u (x,z) ravnini (ekvivalentno u N -dimenzijskom prostoru):

$$\bar{c}_g = \nabla_{\kappa} \nu \Rightarrow c_{g,x} = \bar{u} \pm \frac{Nm^2}{\sqrt{(m^2 + k^2)^3}}, c_{g,z} = \pm \frac{-Nkm}{\sqrt{(m^2 + k^2)^3}} \quad (16a)$$

te je očito da su uzgonski valovi neizotropni. Vertikalna grupna brzina uvijek je suprotno orijentirana od vertikalne fazne brzine, pa ako valne fronte putuju prema gore, energija (putuje niz grupnu brzinu) se prenosi prema dolje. To je jedno od neintuitivnih osobina uzgonskih valova; njihova neobičnost proizilazi iz pripadne disperzijske relacije u kojoj su jako različito zastupljeni horizontalni i vertikalni valni brojevi. Iz toga, te iz diskusije o nagibu valnih fronti, slijedi da ako se energija i grupna brzina šire ka gore, da valni vektor gleda od navjetrine zvonolike planine prema dolje (tj. prema dolje lijevo u odnosu na nadolazeći zrak idealiziranog konstantnog vjetra i stratifikacije).

O širenju energije uzgonskih valova. Izrazi (16a) su standardno dobijeni prema $c_{g,x} = \partial\nu/\partial k$, $c_{g,z} = \partial\nu/\partial m$. Nadalje, tražeći kut smjera širenja energije uglavnom hidrostatičkih valova obzirom na horizontalu, treba imati na umu da se takvi valovi nalaze uglavnom iznad izolirane planine, tj. za promatrača pri tlu valna slika izgleda „zamrznuta“ i vrijedi $c_{p,x} = -\bar{u}$; budući da je fazna „brzina“ u x -smjeru jednaka omjeru frekvencije i valnog broja u x -smjeru, iz (15) slijedi da je $\bar{u} = -[\pm N/(k^2 + m^2)^{1/2}]$. Prvo treba taj zadnji izraz uvrstiti za srednju brzinu u (16a) i onda izračunati traženi kut:

$$\tan(\alpha) = \frac{c_{g,z}}{c_{g,x}} = \dots = \frac{m}{k}. \quad (16b)$$

Stoga, za hidrostatičke valove, $|m| \gg |k|$, vrijedi da im je energija skoncentrirana vertikalno iznad terena, tj. $\tan(\alpha) \rightarrow \infty$; teren je najčešći izvor zračenja planinskih uzgonskih valova. Kod

nehidrostatskih valova općenito vrijedi $|m| \sim |k|$, ili čak $|m| \ll |k|$, što znači da im je energija raspršena iznad i u zavjetrini terena. Stoga je korisno razmotriti spomenute limese omjera (16b).

Vratimo se diskusiji TGE. Izraz (12) se može isto napisati kao

$$\frac{d^2 \hat{w}}{dz^2} + (l^2 - k^2) \hat{w} = 0, \quad (12a)$$

ili jednostavno pomoću vertikalnog valnog broja m :

$$\frac{d^2 \hat{w}}{dz^2} + m^2(z) \hat{w} = 0 \quad (12b)$$

Gdje je $l^2(z) = (N/U)^2 - (d^2U/dz^2)/U = m^2 + k^2$, što se zove Scorerov parametar; to je jedna od najbitnijih veličina u planinskoj meteorologiji. Zadnju diskusiju možemo izraziti usporedbom tog parametra i kvadrata horizontalnog valnog broja. Kad je $l^2(z) > k^2$, onda (12) zadržava valni karakter i mogući su interni valovi u takvom sloju, Slika 4.2 (dolje). Ako za neki sloj vrijedi $l^2(z) < k^2$, onda valovi u njemu nisu unutarnji (npr. nemaju nagnute faze, tj valne fronte), već evanescentni, Slika 4.2 (gore). Jednostavan način da se utvrdi da li se radi o internim ili eksternim valovima jest da se utvrdi njihova faza u prostoru. Unutarnji uzgonski valovi pokazuju karakteristični nagib svojih valnih fronti visinom, dok npr. eksterni planinski valovi leže točno iznad prepreke – izvora valova, bez nagiba valnih fronti. Iduće slike nastavljaju tumačenje zavjetrinskih valova.

Da smo rješavali slično valno gibanje preko beskonačno sinusoidalnog (undulatomnog) terena kao na početku ove lekcije, $h \cos(kx)$, ali ne sa radijacionim nego s reflektivnim gornjim uvjetom na nekoj visini H , priroda rješenja bi bila bitno drugačija. Tada bi zbog uvjeta da $w(H) = 0$ dolazilo do npr. konstruktivnih ili destruktivnih refleksija valova i u krajnjem bi slučaju moglo doći i do „rezonancije“ terena i atmosfere. Takvo se strujanje u stvari ne može računati kao stacionarno gibanje (podsjetite se rješavanja harmoničkog oscilatora s forsiranjem na istoj frekvenciji kao i frekvencija vlastitog titranja oscilatora – tada amplituda rješenja raste linearno u vremenu). Eventualno stacionarno rješenje za vertikalnu komponentu valnog gibanja u takvom slučaju je naime:

$$w(x, z) = \frac{Ukh_0}{\sin(mH)} \sin(kx) \cdot \sin(m(z - H)),$$

odakle se odmah vidi da je ono neograničeno za $mH = \pi, 2\pi$, itd. i tada u stvari dolazi do spomenute rezonancije. Može se pokazati da ovakvi zarobljeni valovi u prosjeku ne prenose valni impuls. Ovo je idealizacija slučaja gdje npr. postoji jaka inverzija ili nagli skok u brzini vjetrova. Ovaj izraz je dobijen uz pretpostavku $w(x, z) = \text{Re}\{Ae^{i[kx + m(z-H)]} + Be^{i[kx - m(z-H)]}\}$ jer se u ovom slučaju mora uzeti u obzir i faza reflektiranih valova (uz amplitudu B). Uvrštavanje rubnih uvjeta dovodi do 4 linearne algebarske jedn. za 4 nepoznanice, tj. $(A_{re}, A_{im}, B_{re}, B_{im})$.

Alternativno, mogli smo pretpostaviti oblik strujne funkcije $\psi(x, z) = Uz + C_0 \cos(kx) \cdot \sin[m(z-H)]$, koja pri dnu treba biti npr. nula, a na vrhu biti konstanta. Uvrštavanjem gornjeg i donjeg rubnog uvjeta to dovodi do $\psi(x, H) = U \cdot H = \text{const}$, te $\psi(x, z=h(x)) = 0 = Uh_0 \cos(kx) - C_0 \cos(kx) \cdot \sin[mH]$, odakle slijedi iznos jedine nepoznate konstante, $C_0 = Uh_0 / [\sin(mH)]$. Ukupna brzina je

$$u_{tot}(x, z) = \vec{j} \times \nabla \Psi.$$

Kasnije ćemo se vratiti na slučaj višeslojne atmosfere. Inače, gornji izraz možemo generalizirati za svako 2D idealizirano strujanje koje može biti opisano strujnom funkcijom:

$$\vec{u}_{1,2} = \vec{n}_3 \times \nabla \Psi ,$$

gdje indeksi znače da u odabranoj ravnini postoje dvije komponente strujanja (lijeva strana jedn.), a na desnoj strani je jedinični vektor u 3. (neovisnom) smjeru.

Varijabilna atmosfera ovdje konkretno znači da se $m(z)$ u TGE u (12) mijenja visinom. Takvi se slučajevi najčešće rješavanju numerički ili nekom od asimptotičkih metoda kao što je npr. WKB(J) metoda; pretpostavimo da je $l^2(z) > k^2(z)$. Tada u (14) do sada konstantna amplituda postaje postupno (blago) varirajuća amplituda, tj. funkcija visine. Nadalje, WKB(J) metodom se pokazuje da rješenje od (12a) postaje za vertikalnu amplitudu vala, čija pak sama amplituda $A(z)$ isto varira i postaje \hat{w} :

$$\hat{w}(z) = w_0 \left(\frac{m_0}{m(z)} \right)^{1/2} \exp \left\{ \pm i \int_0^z m(z) dz \right\} \quad (14a)$$

gdje je $m_0 = m(z = 0)$ a integral u (14a) ide od 0 do z ; bitno je da je amplituda sporo varirajuća funkcija, tj. $m(z)$ se sporo mijenja. Kompletno rješenje vertikalne komponente vala se dobije množenjem (14a) s $e^{\pm ikx}$ a vertikalno putujući val je produkt vertikalno sporo-varirajuće amplitude s $\exp\{i[kx + \int_0^z m(z) dz]\}$. Do (14a) se dolazi iz (12) i (14) tako da se eksponencijalni dio rapidno mijenja obzirom na amplitudu A koja je sporo-varirajuća funkcija (tj. zanemaruje se d^2A/dz^2 u usporedbi s ostalim članovima u TGE, (12)). To dovodi do izraza da je

$$\frac{d(A(z)^2 m(z))}{dz} = 0$$

kad se radi o tzv. WKB(J) aproksimaciji 1. reda kao što je to slučaj ovdje. Ovakvo WKB(J) rješenje ne vrijedi za $m(z) \rightarrow 0$ kao ni za $m(z) \rightarrow \infty$. Prvi slučaj odgovara tzv. nivou refleksije vala gdje je ili statička stabilnost toliko mala da dolazi do refleksije prema gore putujućeg uzgorskog vala, ili je osnovna brzina prevelika pa dolazi također do refleksije. Drugi je slučaj obrnut, $m(z) \rightarrow \infty$, tj. stabilnost je toliko porasla, ili je srednja brzina postala nula, npr. $U(z \rightarrow z_c) = 0$, gdje je z_c tzv. kritični nivo, da val trne kako prilazi toj visini. Za takvu apsorpciju vala oko kritičnog nivoa potrebno je da je gradijentni Richardsonov broj, Ri , svugdje velik, tj. $Ri(z) \gg 1$. Ako to nije slučaj, tj. ako $Ri < 1$, onda ili viskoznost postaje bitna, ili još uobičajenije – dolazi do nelinearnih efekata, val raste, savija se, djelomice puca i djelomice se reflektira. Strujanje postaje vremenski ovisno i jako nelinearno te nužno u 3D stvarnosti.

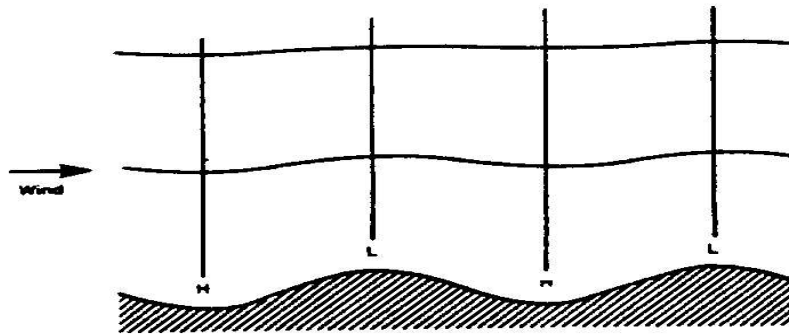
Nivo refleksije, $z \rightarrow z_R$, to znači $m(z) \rightarrow 0$, pa TGE, (12) prestaje biti valna jedn. Kvalitativno rješenje ipak možemo donekle dokučiti asimptotički iz (14a); očito je da vertikalna amplituda vala, $|\hat{w}(z)|$, sada jako raste. Zbog kontinuiteta mase, to kvalitativno znači da amplituda horizontalne komponente vala nestaje. Kritični nivo, $z \rightarrow z_C$, to znači u (12) da $m(z) \rightarrow \infty$, pa $|\hat{w}(z)|$ nestaje asimptotički kako se val približava k z_C , dok pripadna horizontalna amplituda vala „bježi“ u beskonačnosti. Tu je opet očito rušenje linearne valne teorije jer npr. ne smije amplituda vala biti veća od osnovne (srednje) brzine vjetra. Iduća skica prikazuje ulazak valova u kritični nivo; valovi su obilježeni indeksom jedan, tj. w_1, u_1 .



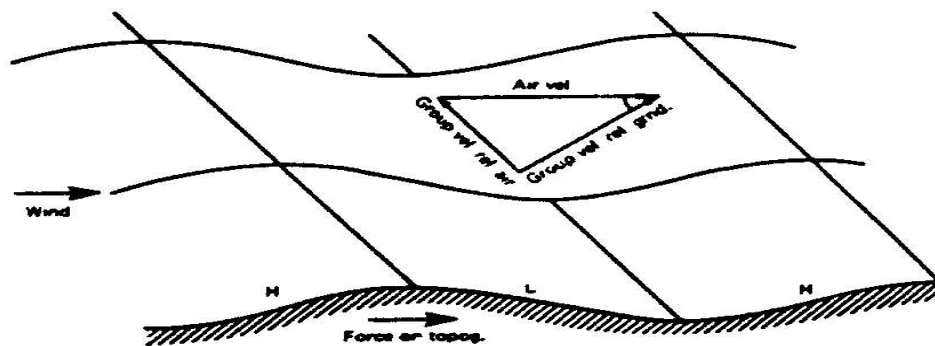
Skica ulaska uzgonskog vala u kritični nivo.

U (14a) prvi faktor predstavlja vertikalno sporo-moduliranu amplitudu $\sim m(z)^{-1/2}$, a drugi je relativno brzo mijenjajuća faza vala s vertikalno usrednjenim valnim brojem od tla do pojedine visine. Da smo rješavali sličan problem, ali u vremenu a ne u z -koordinati, onda bi se radilo o sporo-varirajućoj amplitudi vala ovisnoj o frekvenciji $\sim \omega(t)^{-1/2}$, te u vremenski usrednjenoj frekvenciji u eksponentu drugog (faznog) faktora.

Ako bi se moralo odabrati koji se slučaj može barem kvalitativno opisati WKB(J) metodom: sloj refleksije, ili kritični nivo, onda je to kritični nivo (ili sloj). Vidimo da ovako (14) prestaje biti sasvim periodičko rješenje po visini jer se osobine medija kroz koji val putuje postupno mijenjaju. Ovaj pristup je bio preuzet u dinamici geofizičkih fluida iz kvantne fizike (nerelativistička Schrödingerova jedn.). Inače, WKB(J) pripada u singularne perturbativne metode; radi se o beskonačnom i u principu divergentnom redu (razvoj ide u eksponentu, gdje se onda amplitudni član javlja kao logaritam). Nulti član, odnosno aproksimacija 0-tog reda, ima konstantnu amplitudu i samo varira integral u eksponentu (aproksimacija tzv. geometrijske optike); razvoj do 1. reda je prikazan u (14a) i to je tzv. aproksimacija fizičke optike. Aproksimacija 2. reda bi sadržavala još jedan korigirajući faktor (tj. 3. član u razvoju u eksponentu). Meteorolozi su povlašteni jer mogu prostim okom promatrati pripadne valne procese u atmosferi poput tzv. tuneliranja („*tunneling*“). Slika 4.3a je na određeni način reformulirana Sl. 4.2 tako da je uključen i srednji vjetar.

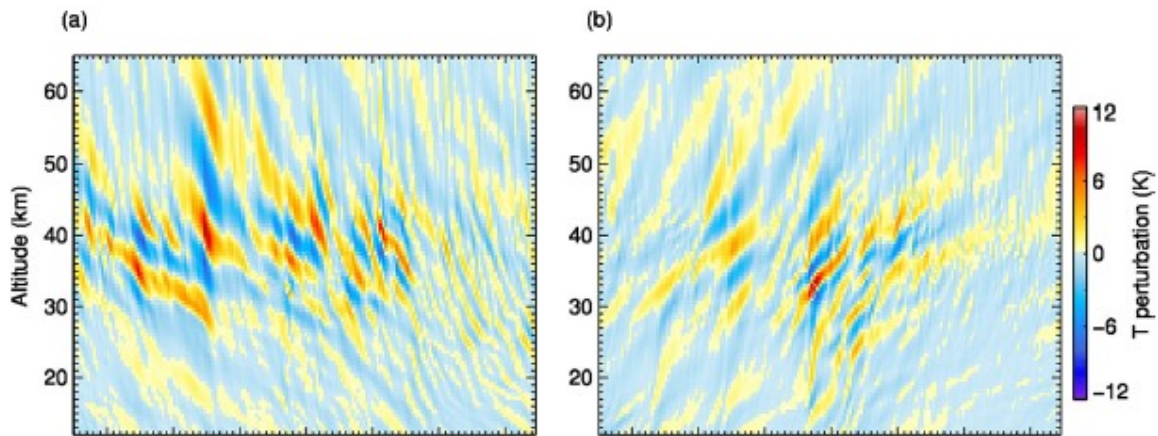


(a)



Slika 4.3a Ilustracija uzgonskih (težinskih) valova: gore – evanescentni, dolje – interni valovi. Osjenčano ispod je teren (valovito brdo), relativno visok tlak (H) je u navjetrini, a niski tlak (L) je u zavjetrini brda. Linije konstantne faze su kod evanescentnih valova okomite na srednju visinu terena, dok su kod internih valova nagnute unaprijed, obzirom na struju zraka, kao $kx + mz = const$ (Izvor: internet).

Već samim uočavanjem uzgonskih valova ponekad možemo dijagnosticirati stabilnost i/ili jačinu vjetrova u troposferi. Najčešće vidimo u mjerenjima zarobljene valove jer je njihova energija sadržana u, uvjetno rečeno, „valovodu“, tj. u sloju pogodnom za postojanje valova. Čisti unutarnji (recimo uvjetno: „pravi“) hidrostatički valovi se relativno teško uočavaju golim okom. Na osnovi radio-sondaže i pripadnog profila Scorerovog parametra se može reći gdje se eventualno nalaze slojevi pogodni za uzgonske valove. Slika 4.3 b prikazuje rekonstrukciju unutarnjih valova u stratosferi iznad ruba polarnog kruga u Skandinaviji.



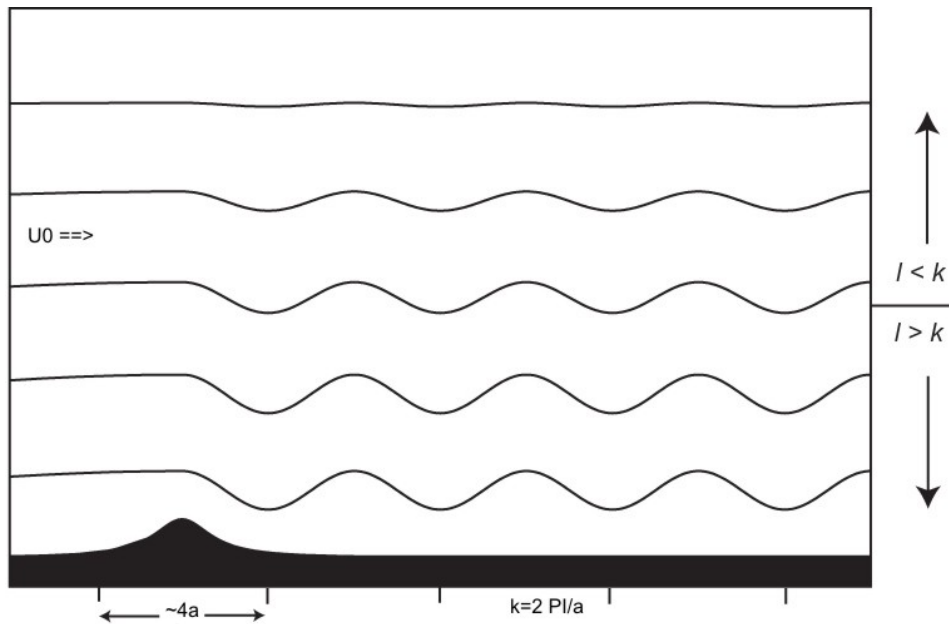
Sl 4.3b Unutarnji (interni) uzgonski stratosferski valovi u polju poremećaja temperature: a) propagirajući prema gore i b) prema dolje. Visina je na y -osi i vrijeme je na x -osi gdje kraće crtice označavaju 2.4 h, dok dulje crtice predstavljaju cijeli dan. Valovi su rekonstruirani statističkom tehnikom valića, engl. *wavelet analysis* (prema Dörnbrack i sur. 2018).

Jedna glavnih osobina uzgonskih (ili malo kasnije, uzgonsko-inercijskih) valova, za razliku od npr. turbulencije, je da ovi valovi mogu prenositi energiju kroz fluid na veliku daljinu, a turbulencija u principu ne može to. Valni paketi i pripadna valna energija putuju grupnom brzinom, njihova fazna slika putuje s pripadnom faznom brzinom, što je sve povezano - kako smo do sada već naučili - s valnom frekvencijom i valnim brojevima. Donekle će slično kasnije biti s turbulencijom, samo što će ova putovati srednjim vjetrom (a ne grupnom brzinom).

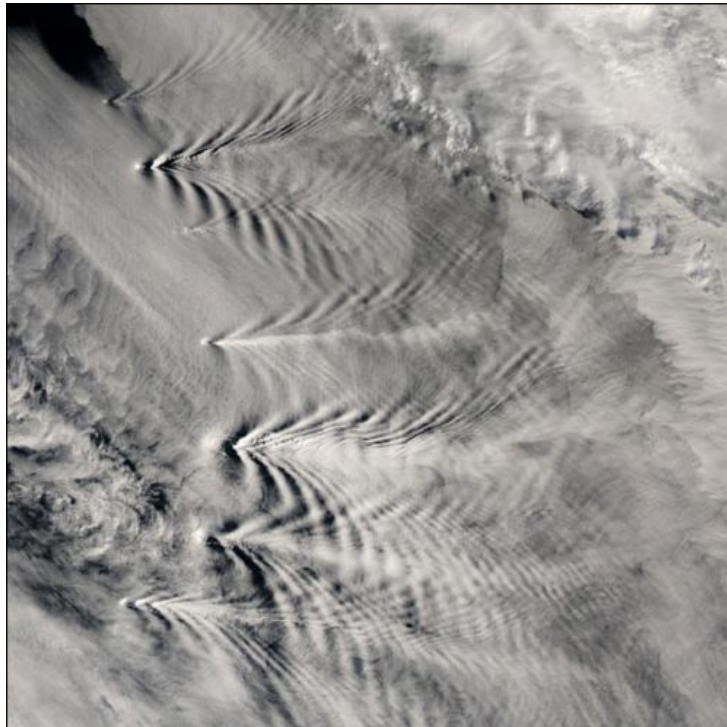
Planinski valovi - detaljnije

Najuočljiviji i najpoznatiji mezoskalni valovi su tzv. planinski (stacionarni) valovi; javljaju se pri strujanju zraka preko planine. Teorijski gledano, tada (11) prelazi u (12). Njima se bavi značajan dio mezoskalne meteorologije i na njih se odnosi (12) ako se radi o linearnim valovima. Podvrsta planinskih valova su zavjetrinski zarobljeni valovi ilustrirani na Slici 4.4a, b i povezani s (12). Oni mogu imati po visini djelomice interni, a djelomice eksterni valni karakter; uvjetno rečeno „valovod“ na Sl. 4.4a je u donjoj troposferi, kao što je diskutirano ispod (16) o Scorerovom parametru. Ispod krijesti zavjetrinskih valova velikih amplituda nerjetko se javljaju manje zatvorene cirkulacije, tzv. 'rotori' čija je os kvazi-horizontalna i paralelna s planinom. Vjerojatno ih je prvi kvalitativno opisao u relevantnoj znanstvenoj literaturi Andrija Mohorovičić (1889), prije no što je postao seizmolog svjetskog glasa, no taj njegov mezoskalni rad je bio zaboravljen u 2. polovici XX stoljeća.

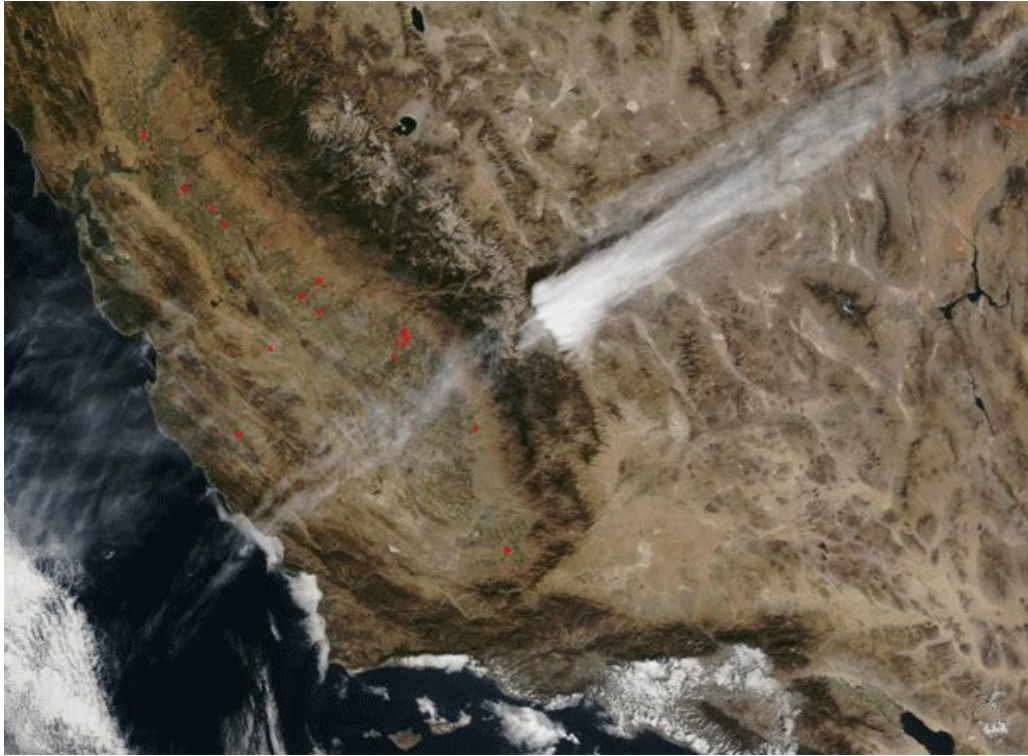
Planinski valovi velike amplitude najčešće uzrokuju planinske zavjetrinske oluje. Njih ćemo više spomenuti pri kraju ovog poglavlja. Mješavina hidrostatičkog i nehidrostatičkog vala vidi se na Slici 4.4c (južni dio Sierra Nevade, između Kalifornije i Nevade). Inače, uobičajene hidrostatičke valove nije lako zamijetiti na satelitskim slikama; ovo na Sl. 4.4.c je rijetki izuzetak.



Slika 4.4a Zavjetrinski zarobljeni valovi u donjoj troposferi gdje je Scorerov parametar l veći od horizontalnog valnog broja k koji je zadan poluširinom idealizirane planine a . Takav slučaj zarobljavanja događa se tamo gdje je stabilnost dovoljno velika a brzina osnovnog vjetera dovoljno mala (tj. Scorerov parametar dovoljno velik u tom sloju; Izvor: internet).



Slika 4.4b Satelitska slika 3D vrste zavjetrinskih zarobljenih valova. Valovi se pojavljuju iza 7 otoka u oblačnom zračnom sloju (Izvor: internet).



Slika 4.4c Veliki planinski uglavnom nehidrostatički val vidljiv u cirusnom oblaku nad Sierra Nevadom, SAD (izvor: Dale R. Durranova web strana, USA, uz prijateljsku dozvolu).

Strujanje preko zvonolike planine

Rješenje strujanja (12) preko sinusoidalne prepreke je vrlo jednostavno, tipa (13) ili (14), kad se znaju (linearizirani) rubni uvjeti, tj. radijacioni gornji te pojednostavljeni orografski donji rubni uvjet. Ovaj donji uvjet zahtjeva da je orografija $h(x)$ ujedno i strujnica, tj. $w(x, z \approx 0) = Udh/dx$. Malo kompliciraniji teren od sinusoide je zvonolika planina; već tada je vrlo nespretno rješavati TGE za svaku pojedinu valnu komponentu zastupljenu u orografiji.

Već je ispod (10d) spomenut postupak rješavanja pripadne valne jedn. Pri tome se koristi Fourierova transformacija, FT. Izračuna se $FT(h)$, tj. spektar terena, pomnoži se s pripadnom vertikalnom strukturnom funkcijom, slično kao u (14), te se izračuna inverzna transformacija, IFT koja predstavlja polje poremećaja strujnice, $\eta(x, z)$; ova se linearno raspodijeli po neporemećenoj visini prilikom crtanja. Iz $\eta(x, z)$, tj. poremećaja strujnice što isto mora zadovoljavati TGE, odnosno (12) i (14), onda se jednoznačno odredi $w = U\partial\eta/\partial x$, $u = -U\partial\eta/\partial z$ i ostala valna polja.

Najčešći primjeri su idealizirane zvonolike planine, npr. gaussovska planina⁴ (izvrstan primjer za vježbe), ili tzv. planina „vještice“ Agnesi ('*Witch-of-Agnesi*'), $h_0[1+(x/a)^2]^{-1}$, gdje je a poluširina planine, čiji ćemo primjer strujanja ukratko opisati. Ovakvo smo strujanje spomenuli ispod (10d). Prvo definiramo strujnicu na osnovi spektra terena $\hat{h}(k)$ i rješenja stacionarne hidrostatičke TGE jedn. uz radijacioni gornji rubni uvjet:

⁴ Pripadni FT je opet gaussovska krivulja.

$$\begin{aligned}
\eta(x, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx+im(k)z} \hat{h}(k) dk \\
\hat{h}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} h(x) e^{-ikx} dx \\
\hat{h}(k) &= h_0 a^2 / (2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iks}}{a^2 + s^2} ds \\
&= \frac{h_0 a^2}{2\pi} \{ \pm 2\pi i \text{Res} [\frac{e^{-iks}}{a^2 + s^2}] \}, \\
&\quad (s = \pm ia)
\end{aligned} \tag{17}$$

gdje je i imaginarna jedinica a s je kompleksna varijabla čiji se reziduom, Res , računa u gornjoj ($k < 0$) ili donjoj ($k > 0$) kompleksnoj poluravnini, ovisno od predznaka od valnog broja k (što određuje karakter podintegralne funkcije, teorem o reziduomima i primjena Jordanove leme). Fourierov spektar promatranog terena $h_0/[1+(x/a)]^{-1}$ je, $\text{FT}(h)$:

$$\hat{h}(k) = h_0 a \frac{e^{-|ak|}}{2} \tag{18}$$

i to se uvrštava u integralni izraz za $\eta(x, z)$; provodi se integracija s dva integrala za $-\infty < k \leq 0$ te $0 \leq k < \infty$ pri tom vodeći računa da je predznak od m isti kao i predznak od k . Taj suptilni uvjet slijedi iz pravilnog izbora smjera širenja valne energije (prema gore od planine) i odabira valnog vektora okomitog na grupnu brzinu. Ovaj dalji račun je relativno jednostavan za slučaj hidrostatičkih valova gdje je vertikalni valni broj $m = \pm N/U$; nakon nekoliko redaka pažljive integracije dobije se za eksterne (evanescentne) valove ($|k| > |N/U|$)

$$\eta(x, z) = \frac{h_0 a(a+z)}{(a+z)^2 + x^2}, \tag{19a}$$

odnosno za interne valove ($|k| < |N/U|$)

$$\eta(x, z) = h_0 \frac{\cos(mz) - \frac{x}{a} \sin(mz)}{1 + \frac{x^2}{a^2}}. \tag{19b}$$

Slika 4.2 prikazuje rješenja (19) za linearne strujnice pripadnih planinskih valova. Očito je iz (19) da poremećaj strujnice $\eta(x, z) \rightarrow 0$, za $x \rightarrow \pm \infty$, te da je za interne uzgonske valove $\eta(0, z) = h_0 \cos(mz)$, te za $z \rightarrow 0$, $\eta(x, 0) = h(x)$. Nadalje, u slučaju evanescentnih valova (19a) također pokazuje da $\eta(x, z) \rightarrow 0$ ako x ili z teže u beskonačnost, odnosno $\eta(x, z \rightarrow 0) = h(x)$.

Račun za nehidrostatičke valove je kompliciraniji; analitički se može aproksimativno (uz malo sreće i asimptotički) riješiti tek za nekoliko orografija. Pri tome se najčešće koriste asimptotičke metode za rješavanje integrala, tzv. metoda stacionarne faze, metoda najdubljeg pada, itd. (engl. 'method of stationary phase, method of steepest descent'). Poznavajući poremećaj strujnice (19), jednostavno se izračunavaju ostala strujna polja, $w(x, z)$, $u(x, z)$, $\theta(x, z)$ i $p(x, z)$.

Kompleksniji teren od Agnesi-vještice u (17), npr. blizak stvarnosti, je neki općeniti $h(x,y)$; tada se koriste numeričke metode za ovakav račun koji obično uključuje tzv. brzu Fourierovu transformaciju u 2D (FFT2D).

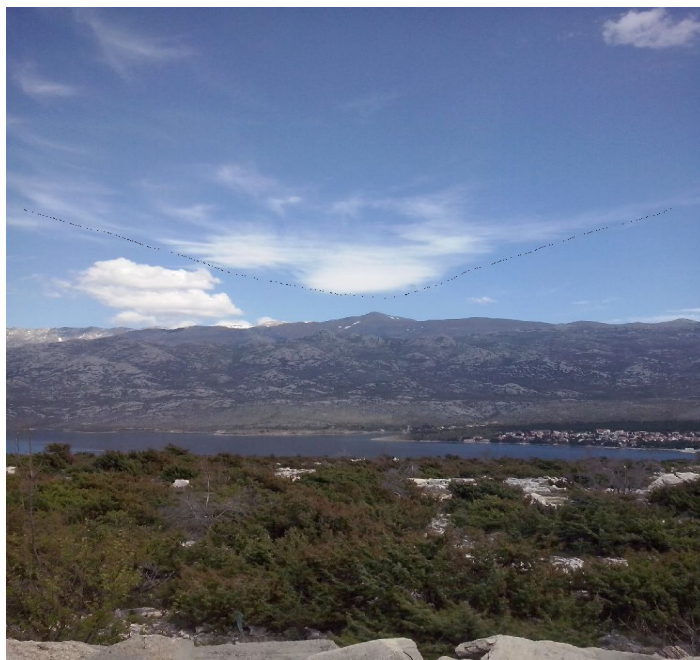
Ukratko o 3D valovima kakvi se javljaju iznad 2D terena. Tada je linearizirani donji rubni uvjet $w(x,y) = U\partial h/\partial x + V\partial h/\partial y$. To ujedno znači da najniža „strujnica“, tj. strujna ploha koincidira s terenom; primjetimo da u nelinearnom strujanju to ne mora biti slučaj [npr. kad se strujnica zatvara u zavjetrini čineći rotor, ili kad se strujnica razdvaja dobijajući uvjetno dvoznačnu vrijednost (dvoznačnost se tad rješava dodatnim uvjetima) stvarajući npr. interni granični sloj]. Pripadna jednačba disperzije (15) se poopćuje u

$$\tilde{v} = v - \bar{u}k - \bar{v}l = \pm \frac{N\sqrt{k^2 + l^2}}{\sqrt{m^2 + k^2 + l^2}} = \pm \frac{Nk_H}{|\vec{k}|}, \quad (15b)$$

gdje je k_H horizontalna projekcija 3D valnog vektora (srednji vjetar je označen ravnopravno velikim slovom U , V , ili s potezom iznad, ili s indeksom nula „() θ “). Očito da je ova Doppler-pomaknuta frekvencija opet jednaka produktu uzgonske frekvencije i spomenutoj projekciji valnog vektora. Opet postoje hidrostatički i kompletniji tj. nehidrostatički 3D valovi. Za razliku od proučavanih 2D hidrostatičkih valova koji su nedisperzivni i nalaze se uglavnom direktno iznad planine u stacionarnom strujanju, 3D hidrostatički valovi su disperzivni i energija im dominantno leži u parabolama tipa

$$y \approx \sqrt{zx \frac{Na}{U}}, \quad (20)$$

gdje su x , z , a , N i U kao i prije a y je lateralna udaljenost, tj. koordinata okomita na srednji vjetar U (Smith 1980). Ova sugestivna asimptotička relacija (20) kazuje da je relativno raspršenje valne energije veće za relativno mali U (tada y raste) i jaku statičku stabilnost zraka. Nadalje, geometrijski gledano, porastom visine ili udaljenosti od planine, raste i lateralna udaljenost gdje je maksimizirana valna energija. Primijetimo da je (20) mogla biti izvedena i na osnovi dimenzijske (skalne) analize. Slika 4.4d prikazuje pripadnu široku parabolnu strukturu u rasporedu cirusnih oblaka nad Velebitom.



Slika 4.4d Približna parabola (sitne crne točkice oko *Ci spi*) blagog planinskog (stacionarnog) vala nad južnim Velebitom (naselje u zaljevu, desno, je Maslenica) 21.04.2015; snimio Damir Ptičar. Lijevo gore su vjerojatno viši modovi, *Ci*, a desno gore se može raditi o dva fenomena: ili zaostali dio osnovnog moda vala, ili vjerojatnije *Cu fra* od vjetra zmorca.

O valnoj napetosti - Eliassen-Palmov teorem. Jednostavno se pokazuje da je produkt uw , tj. bilinearna valna tvorevina, valna napetost (uvjetno: valni 'otpor'), u prosjeku očuvan za stacionarne 2D valove bez disipacije; prosjek se računa po horizontali i za bilo koji relevantni nivo ovaj mora biti isti, odnosno konstantan. Drugim rječima, $\partial/\partial z(\langle uw \rangle_x) = 0$ gdje je $\langle \rangle_x$ spomenuti srednjak; ovaj integral se odabire tako da usrednjavanje ima smisla. Dakle, radi li se o beskonačno sinusoidalnoj orografiji (tzv. korugaciji), dovoljno je integrirati samo preko faze vala, ili preko horizontalne valne duljine $\lambda_x = 2\pi/k$; za zvonoliku planinu u analitičkom slučaju integriramo po $-\infty < x < \infty$, dok u npr. numeričkom mezoskalnom modelu najčešće zbrajamo doprinose spomenutom produktu uw na pojedinim nivoima modela (npr. σ -plohe). To je Eliassen-Palmov teorem za uzgonske valove i vrijedi i u blago nelinearnom strujanju.

U vrlo nelinearnom slučaju dolazi do konvergencije ili divergencije valne napetosti, i stoga pojave valnog otpora, a to dovodi do ubrzanja ili usporavanja strujanja (npr. slučaj olujne bure). Ovaj teorem je važan za provjere različitih (npr. numeričkih) modela, osjetljivost računskih shema te izvedbu parametrizacija ovih valova u klimatskim modelima koji nemaju dovoljno finu rezoluciju da bi 'vidjeli' ove valove. Pokazalo se da ovi valovi igraju suptilnu ulogu u npr. dinamici polarnih vrtloga, stratosferskoj i mezosferskoj mlaznoj struji, itd. Bez njihovog se uključivanja nije mogla dovoljno dobro modelirati izmjerena planetarna cirkulacija. Čak i kad je osnovna atmosfera blago do umjereno varijabilna, ovaj teorem vrijedi i nema značajnog ubrzanja ili usporavanja strujanja preko terena. Dalje, valna napetost i spomenuta forma Eliassen-Palmovog teorema je dodatna mjera kontrole valjanosti i točnosti numeričkih modela; očuvanost ove integralne mjere valovitosti u modelu se relativno jednostavno provjerava i nerjetko se koristi zajedno s očuvanjem ukupne energije, entropije i mase u modelu (Pielke, 1984; Nappo, 2002). Koncept valne napetosti se primjenjuje na velikoj i maloj skali (npr. Teixeira i Grisogono, 2008).

Jednostavnim se računom pokazuje da valna napetost u hidrostatičkom strujanju ovisi linearno o srednjoj brzini vjetra i kvadratno o visini prepreke. Nadalje, integrirajući produkt valnih polja

$w\theta$, kao i kod valne napetosti, pokazuje se da je integralni doprinos valnog prijenosa topline, tj. potencijalne temperature nula. Odnosno, linearni uzgonski valovi prenose impuls, ali ne i toplinu. Inače, računanje valne napetosti (uvjetno, valnog 'otpora') za strujanje preko 2D terena, $h(x,y)$, je izvedivo analitički za svega nekoliko posebno jednostavnih oblika terena, jer nije lako izračunati pripadne 2D Fourierove transformacije; stoga se najčešće koriste numeričke metode. U slučaju linearnog nerotirajućeg hidrostatičkog stacionarnog strujanja preko 'Witch-of-Agnesi' planine, $h(x) = h_0[1+(x/a)]^{-1}$, gdje su h_0 i a visina i poluširina prepreke, valna napetost se može izračunati kao

$$F_{f=0} = \rho_0 \int_{-\infty}^{\infty} u w dx = -2\pi\rho_0 UN \int_{-\infty}^{\infty} k \hat{h} \hat{h}^*(k) dk = -\frac{1}{4} \pi \rho_0 UN h_0^2,$$

gdje se ponekad pretpostavlja suprotni predznak za F , a oznake imaju uobičajeno značenje i $()^*$ predstavlja kompleksno konjugiranu vrijednost. Ova vrijednost of F se progresivno smanjuje u slučaju jednoliko kontinuirano stratificiranog rotirajućeg i nehidrostatičkog strujanja (konstantni U i N). Nadalje, pripadni se integral može izračunati i s podintegralnom funkcijom koja umjesto valnih poremećaja brzine uključuje poremećaj tlaka i derivaciju terena $h(x)$. Valna napetost strujanja preko dvostruke zvonolike planine različite visine i širine prvi puta su proučavali u f-ravnini Grisogono i sur. (1993).

Najkraće o rješavanju TGE kod kritičnog nivoa (ili sloja): $m(z)^2$ u (12) je dominiran 1. članom, tj. $[N/(U-c)]^2$ što dovodi do singulariteta, tj. pola 2. reda u (12). Brzina U se razvija u red i koristi se Frobeniusova metoda lokalnog razvoja rješenja oko z_c . To dovodi do indicijalne jedn. za faktor λ u eksponentu beskonačnog razvoja rješenja u red: $\lambda(\lambda-1) + Ric = 0$, gdje je Ric gradijentni Richardsonov broj oko z_c . Slijedi da je $\lambda = \frac{1}{2} \pm i\mu$, $\mu = [Ric - \frac{1}{4}]^{1/2}$ pa za ovakvo rješenje Ric treba biti dovoljno velik, tj. barem veći od 0.25.

Nelinearni valovi

Vratimo se 2D valovima, tj. 1D terenu. Kad valovi postignu amplitude donekle usporedive s valnom duljinom, onda postaju nelinearni. Obično se prvo javlja blaga nelinearnost; tad je produkt amplitude vala A i valnog broja m blizu 1, tj. $O(A m) \sim 1$. Solitoni su tipičan primjer blago nelinearnih valova i prvi su puta uočeni na plitkoj vodi sredinom XIX stoljeća (Boussinesq i Stokes su bili među prvima koji su pokazali da takvi pulsevi u fluidu mogu postojati i dugo putovati bez značajne promjene oblika). Nelinearni planinski valovi su obično strmiji u zavjetrini nego u navjetrini, a slično se može reći i za jaku buru gdje u zavjetrini dolazi do tolikog ubrzanja da linearna teorija ne može opisati takvo strujanje.

Dok se god 2D uzgonski valovi ne lome, u biti im se ne mijenja valna napetost. Uzimajući samo x -komponentu gibanja u obzir, tj. ako je strujanje dominantno u 2D,

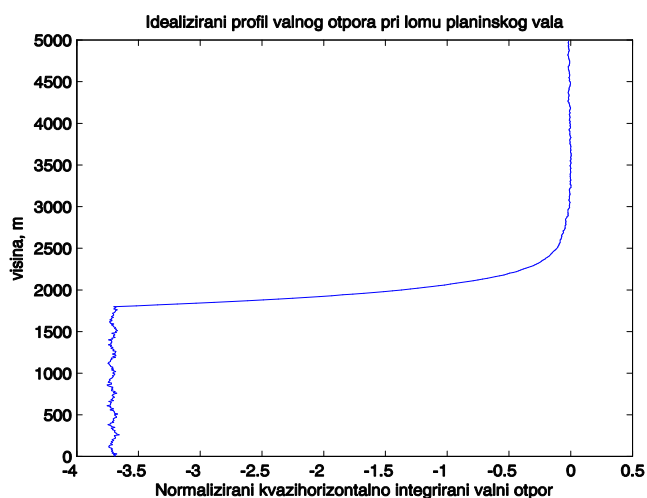
$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial [u'' w'']}{\partial z} - D, \quad (21)$$

gdje su u (21) dodana 2 člana na desnoj strani: prvi je doprinos vertikalne divergencije turbulentnih tokova impulsa koreliranih kao $[]$, što predstavlja usrednjavanje preko ansambla (ali je najčešće u praksi ostvareno kao srednjak u vremenu u pojedinoj točki, a drugi član je dodatna implicitna difuzija (npr. zbog neperfektne numerike)). O 1. novom članu u (21) će biti puno govora kasnije, a drugi se dotiče u numeričkom modeliranju. Idealno, desna strana od (21) bi bila nula i onda je to x -komp. Eulerovih jednadžbi gibanja. Koristeći 2D jednažbu kontinuiteta da se preuredi advektivni član na lijevoj strani od (21), tj. $w\partial u/\partial z = \partial(uw)/\partial z + u\partial w/\partial z$, te integrirajući

tako preuredjeni izraz (21) po $-\infty < x < \infty$, što označavamo jednostavno kao $\langle \rangle_x$, dobijamo (pretpostavljamo da ne postoje perturbacije tlaka i vjetra u beskonačnosti):

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial t} \right\rangle_x = - \frac{\langle \partial u w \rangle_x}{\partial z} - \frac{\langle \partial [u'' w''] \rangle_x}{\partial z} - \langle D \rangle_x, \quad (22)$$

ovdje (22) pokazuje da nema prosječnog ubrzavanja fluida (lijeva strana) ako je: valna napetost konstantna visinom (1. član na desnoj strani), te ako nema doprinosa od 2 zadnja člana na desnoj strani u (21) odnosno (22). Ovo je bila ujedno i primjena Eliassen-Palmovog teorema. Dolazi li negdje u fluidu do promjene amplitude valova, onda pripadna valna napetost neće biti konstantna i doći će do ubrzavanja ili usporavanja srednjeg strujanja zbog smanjenja ili porasta valnog otpora. Ovo je primjer nelinearne teorije gdje valovi (i/ili turbulencija) mogu promijeniti srednje strujanje. Idealizirani prikaz desne strane (22) za slučaj loma planinskih valova nalazi se na Sl. 4.4e gdje je već uvažen minus predznak. Ispod 1800 m postoji nekoliko puta jača valna napetost nego za pripadno linearno strujanje; iznad toga otpor jako slabi i taj sloj odgovara najjačem lomu valova; iznad otprilike 2900 m valna napetost je jako mala (male fluktuacije otpora predočavaju valne interakcije, turbulentne doprinose i nesavršenost numeričkog modela).



Slika 4.4e Idealizirani vertikalni profil približno horizontalno integrirane valne napetosti (normaliziran pripadnom linearnom vrijednošću). Profil nije vertikalno očuvan zbog loma vala između ≈ 1800 i 2600 m. Preostale male fluktuacije predstavljaju utjecaj uglavnom turbulencije i donekle nesavršenosti numerike.

Blago-nelinearni valovi

Ukratko ćemo dotaknuti neke osnovne karakteristike slabo- ili blago-nelinearnih valova na primjeru naginjanja stacionarnih hidrostatičkih orografskih valova (više u Smith 1977). Primijetimo da TGE, tj. (11) ili (12), nema svoj nelinearni ekvivalent. Ipak, ta se jedn. može proučavati za nelinearan donji rubni uvjet i to ćemo ovdje ukratko učiniti. Spomenuta stacionarna jedn. se može napisati, umjesto za $w(x,z)$, za poremećaj strujnice $\delta(x,z)$ jer u 2D vrijedi $w = U(\partial\delta/\partial x)$, gdje je U osnovni vjetar. U sasvim linearnom, već proučavanom, slučaju vrijedi za donji rubni uvjet da najdonja strujnica korespondira s orografijom $h(x)$, tj. $\delta(x, z \approx 0) = h(x)$. U blago-nelinearnoj teoriji se to korigira u $\delta(x, z \approx h(x)) = h(x)$. Pri tom transcendentnom problemu koristi se razvoj u Taylorov red oko nulte visine na lijevoj strani.

Ako je vrijedilo za relativno niske planine $h(x) = A \cos(kx)$, onda $\delta_{LIN}(x,z) = A_{LIN} \cos(kx + lz)$ je linearno rješenje za strujnice. Izraz za poremećaj strujnice u blago nelinearnom strujanju, imajući

na umu da vrijedi $(Al) \sim O(1)$, aproksimiramo $\delta(x, h(x)) = h(x)$ razvojem $\delta(x, 0) + (\partial\delta/\partial z)|_0 \cdot h = h(x)$. Na ovaj način se stvara raznolika interferencijska struktura strujnica iznad planine, što može biti ponegdje strmije nego što je sam teren ispod strujnica; to može dovesti do značajnijih pojačanja i slabljenja strujanja nego u linearnoj teoriji.

Vrlo nelinearni valovi

Na primjer, pri jako nelinearnom i presavijajućem valu nad planinom $Fr \leq 1$, u donjem dijelu zavjetrine val jako ubrzava strujanje, dok iznad tog sloja s niskom zavjetrinskom mlaznom strujom, dolazi do jakog usporavanja, gdje je val u protufazi s osnovnim strujanjem. U tom gornjem sloju strujanja nad samim vrhom planine i u zavjetrini lako dolazi do loma vala i pojačane turbulencije i recirkulacije zraka. Ovakav se valni proces ne može ispravno opisati linearnom valnom teorijom kojom smo se uglavnom bavili do sada, niti naknadnim korekcijama kao u slučaju blage nelinearnosti sugerirane u prethodnom paragrafu.

Prva zona recirkulacije zraka pojavljuje se u zavjetrini ako se pojave spomenuti rotori ispod jakih zavjetrinskih valova. Druga zona recirkulacije zraka može se pojaviti u nižim slojevima navjetrine i pripadnom graničnom sloju jer taj zrak pri $Fr \leq 1$ najčešće nema dovoljnu kinetičku energiju da prijedje preko planine pa ili obilazi planinu sa strane, ili pak recirkulira struajući suprotno osnovnom vjetru koji puše iznad. Dio mezoskalne meteorologije se odnosi na planinsku meteorologiju (iznad i u blizini planina ne vrijedi klasična sinoptička meteorologija i pripadna prognoza). U zadnjih se 30-ak godina intenzivno radi na proučavanju nelinearnih valova ($Fr \sim 1$ ili $Fr < 1$) i mokrih procesa. Nelinearna valna dinamika jake i olujne bure ima lijepu analogiju s nelinearnim hidrauličkim strujanjem, tj. nelinearnim jednadžbama plitkog fluida gdje je dozvoljena velika varijacija Fr . Slika 4.5 skicira 3 vrste hidrauličkog strujanja; prva 2 se mogu dobro opisati linearnim jednadžbama plitke vode za $Fr < 1$, ili $Fr > 1$. No treće strujanje (donja sličica), koje najčešće odgovara jakoj i olujnoj buri, se kvalitativno opisuje samo nelinearnim jednadžbama plitkog fluida jer tamo $Fr \sim 1$ jako varira.

Očekuje se da studenti znaju sami pronaći 1D jednadžbe plitkog fluida (vode) i pokazati odnose između poremećaja brzine i visine strujnice u ovisnosti o Fr za plitku vodu, $Fr \rightarrow U/(gH)^{1/2}$, gdje je H srednja dubina i opet $U = u_0$ je srednja brzina strujanja. Ukratko, za 1D linearan i nerotirajući plitki fluid vrijedi u stacionarnom slučaju:

$$u_0 \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{g\Delta\rho}{\rho_0} \frac{\partial h'}{\partial x} = 0 \quad (23a)$$

$$u_0 \frac{\partial (h' - h_m)}{\partial x} + H \frac{\partial u'}{\partial x} = 0, \quad (23b)$$

gdje su $()'$ mali poremećaji visine i brzine fluida ispod srednje dubine H (visina prijelaza iz donjeg u gornji plitki fluid, npr. voda i na njoj ulje) koji struji preko prepreke $h_m(x)$ i postoji skok u gustoći $\Delta\rho$ između donjeg gušćeg i gornjeg rjeđeg plitkog fluida. Rješenje od (23) je linearno:

$$h' = -h_m (u_0/c)^2 / (1 - (u_0/c)^2), \quad u' = h_m / H (u_0 / (1 - (u_0/c)^2)), \quad (24)$$

gdje je Fr^2 u nazivniku, $Fr = u_0/c$, $c^2 = gH$. Ovaj sustav ne vrijedi za transkričko strujanje na Slici 4.5 (dolje), već samo za ili $Fr > 1$, ili samo za $Fr < 1$. Inače, treba rješavati nelinearan sustav:

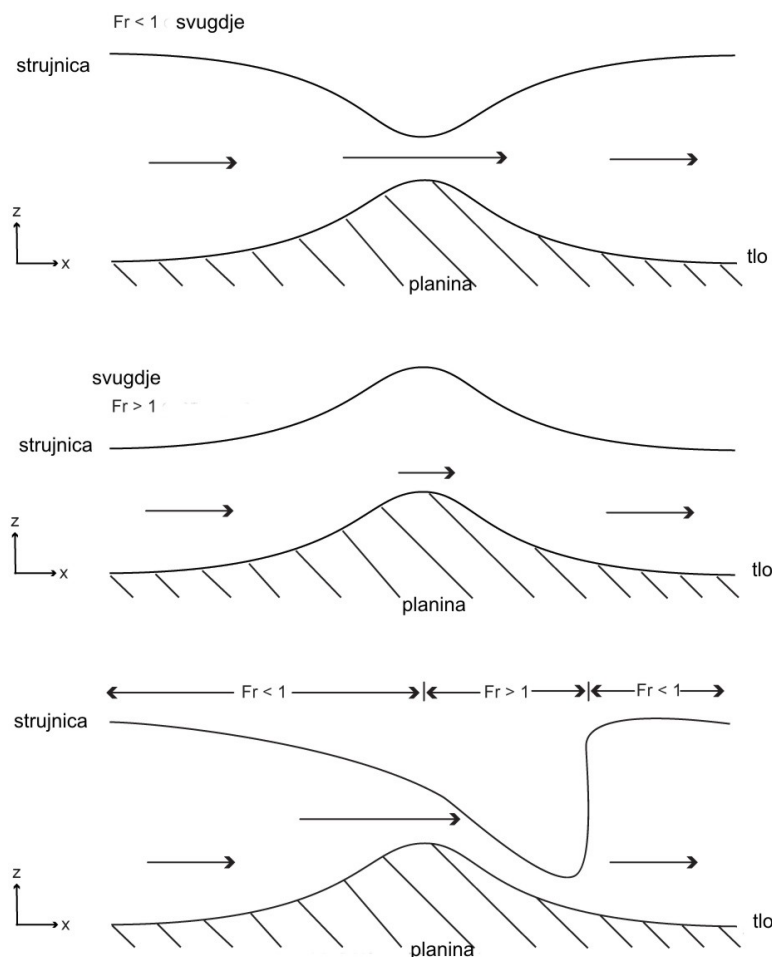
$$u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial [u(h - h_m)]}{\partial x} = 0. \quad (25)$$

Eliminirajući promjenu od h :

$$(1 - Fr^2) \frac{\partial u}{\partial x} = ug / c^2 \frac{\partial h_m}{\partial x} \quad (26)$$

gdje je sada kvadrat lokalne brzine valova plitkog fluida $c^2 = g(h-h_m)$. Iz zadnjeg se izraza, zajedno s donjom Slikom 4.5 može shvatiti priroda pojačanja strujanja u zavjetrini koji je sličan jakoj buri.

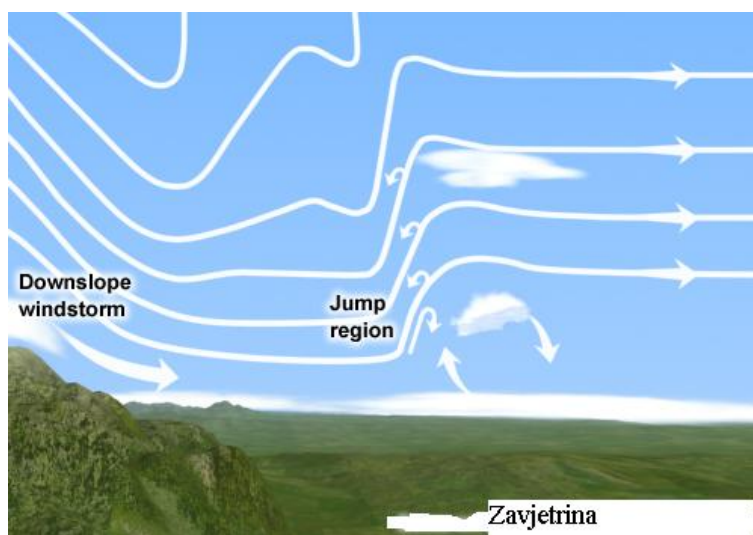
Sustav (25) i (26) je bit konceptualnog modela koji dovodi do značajnog (nelinearnog) pojačanja vjetra u zavjetrini, što se nije moglo općenito naći u linearnoj valnoj teoriji (u stvari može se naći, ali pod vrlo specifičnim uvjetima, najčešće rezonantnim, koji prije ili kasnije svejedno prijeđu u nelinearni režim). Smith (1985) je pokazao, te nekoliko domaćih znanstvenika potvrdilo, da ovaj model kvalitativno dobro tumači jaku i olujnu buru (barem na sjevernom i dijelu srednjeg Jadrana). Pokazano je da u tim situacijama dolazi do jakog nagninjanja i eventualnog loma planinskih uzgonskih valova.



Slika 4.5 Prikaz hidrauličkog strujanja preko planine: gore – potkritički režim, sredina natkritički režim, dolje – općenito kritički (ili transkritički) režim strujanja. Donja ilustracija najčešće odgovara jakoj i olujnoj buri, te vjetru föehn i chinook (Izvor: internet).

Idealizirana ilustracija jakih i pucajućih planinskih valova i nerijetkih zavjetrinskih oluja se nalazi na Slici 4.6. To je prirodan slijed daljeg razvoja strujanja sa Slike 4.1b s početka ovog poglavlja. Zanimljivo je i pomalo čudno da se najjači interni uzgonski valovi (u smislu najveće amplitude i loma valova) bolje opisuju nelinearnom hidrauličkom teorijom, tj. nelinearnom teorijom plitkog (nerotirajućeg) strujanja, nego npr. 3D teorijom linearnog stratificiranog strujanja. Očito da se dominantni interni hidrostatički val toliko poveća, nagne i izobliči (deformira i ponekad zamota u sebe), da radikalno promijeni prethodno srednje stanje fluida, te gotovo dokine lokalno efekt stratifikacije formirajući dva bitna sloja nad vrhom i u zavjetrini planine: donji – jureći, i gornji – sporo-putujući ili stagnantan sloj. Takvi veliki i općenito kvazi-stacionarni valovi nerjetko proizvedu i vlastite kritične nivoe, tj. nivoe gdje je srednji $U(z_c) \rightarrow 0$. To su područja jake turbulencije i približno se nalaze na oko pola vertikalne valne duljine, $\frac{1}{2} (2\pi U/N)$ i malo ispod toga; za slučajeve olujne bure na sjevernom Jadranu to je sloj otprilike između 1 do 3 km visine.

Pored spomenute stagnacije nad zavjetrinom, obično dolazi i do stagnacije strujanja i u navjetrini, tako da samo dio navjetrinskog zraka prelazi prepreku i sudjeluje direktno u valovitom gibanju. Zadržani se dio zraka obično dijeli na onaj koji obilazi planinu (imajući manju kinetičku energiju od potencijalne energije koju predstavljaju planina i stratifikacija) i na manji dio koji eventualno recirkulira prema natrag tj. uzvodno. Stagnaciju zraka je nemoguće ispravno opisati linearnim teorijama. Procjena visine H_R recirkulirajuće i razdvajajuće strujnice u navjetrini se najčešće osniva na procjeni internog Fr za donju troposferu i eventualnog eksperimentalnog korektivnog faktora $0 < a < 1$, te je onda približno $H_R \approx H(1 - aFr + a_1Fr^2 + \dots)$, $|a_1| < a$, $Fr < 1$, gdje je H maksimalna visina terena.



Slika 4.6a Idealizacija zavjetrinske planinske oluje kod Bouldera, Colorado. Vjetar puše s lijeva u desno, prema npr. Denveru. Kvalitativno slična situacija se događa kod olujne bure; tad bi na lijevoj strani slike bio npr. Velebit, na desnoj more i otoci a pogled bi bio sa sjever-sjeverozapada (Izvor: COMET, internet).

Naravno da je zavjetrinska strana spektakularnija od navjetrinske jer se tamo događa pri lomljenju valova i olujni ili čak orkanski vjetar. Fotografija jedne takve oluje u zavjetrini Sierra Nevade je prikazana na Sl. 4.6b. O pripadnim najdonjim slojevima atmosfere, tzv. graničnim slojevima, ćemo govoriti u zadnjem dijelu skripte; ipak spomenimo da se malo zna o kompleksnim planinskim graničnim slojevima, gdje ne vrijedi horizontalna homogenost strujanja (vidi Sl. 4.6 i 4.7). Postoje dva glavna tipa zavjetrinskih olujnih nelinearnih valova: I vrsta ili undularni soliton (engl. *undular soliton* ili *undular bore*), i II vrsta ili turbulentni soliton (s hidrauličkim skokom). I vrsta je karakterizirana prvim, najčešće najjačim valom popraćenim

nizom paralelnih zavjetrinskih valova ispod kojih se ponekad javljaju i rotori. II vrsta je općenito jača, turbulentnija i obično se sastoji samo od jednog velikog jako nelinearnog i nesimetričnog vala. Obje vrste vala se rješavaju viška energije, u slučaju I to ide kroz stvaranje niza ostalih zavjetrinskih valova, a u slučaju II stvaranjem turbulencije.

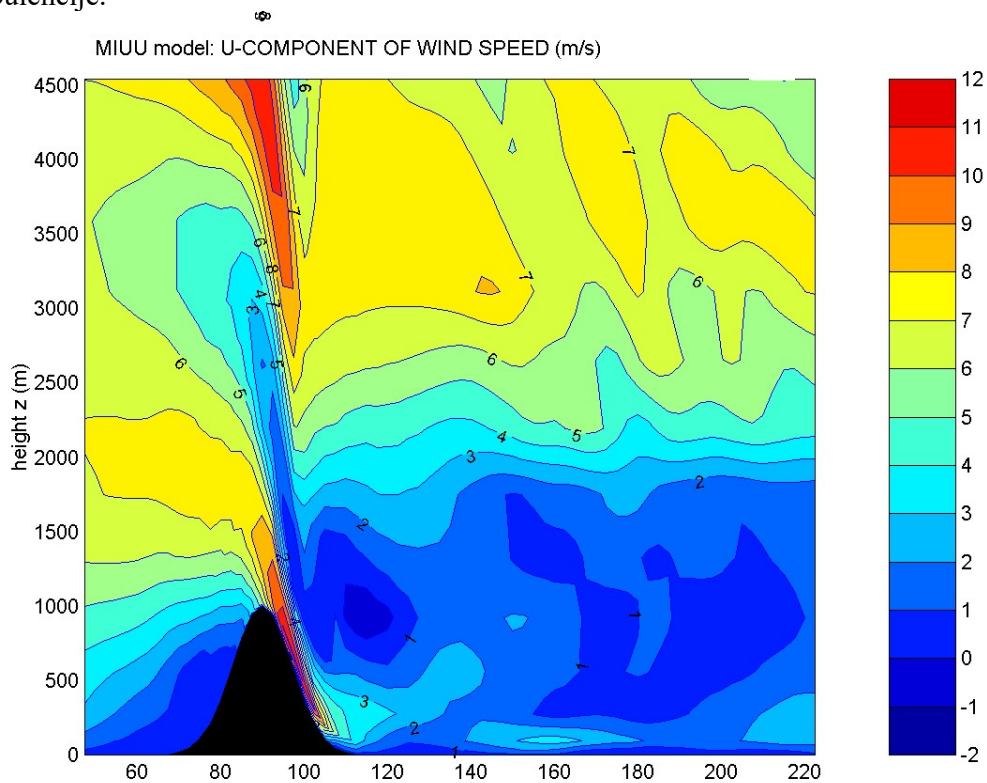


Slika 4.6b Fotografija iz aviona s visine 9.8 km (T. Henderson) nad Owensovom dolinom, Sierra Nevada (SAD), pogled prema jugu; strujanje je s desna u lijevo. Uočava se jaka zavjetrinska recirkulacija i kao da se podiže zid oblaka tamo gdje se javlja hidraulički skok. To je najjači oblik zavjetrinskog nelinearnog vala, uvjetno rečeno jakog solitona (slabija forma je undulatorni soliton, engl. *undular bore*, što ponekad ispod sebe imaju rotore). Iznad toga su lentikularni oblaci.

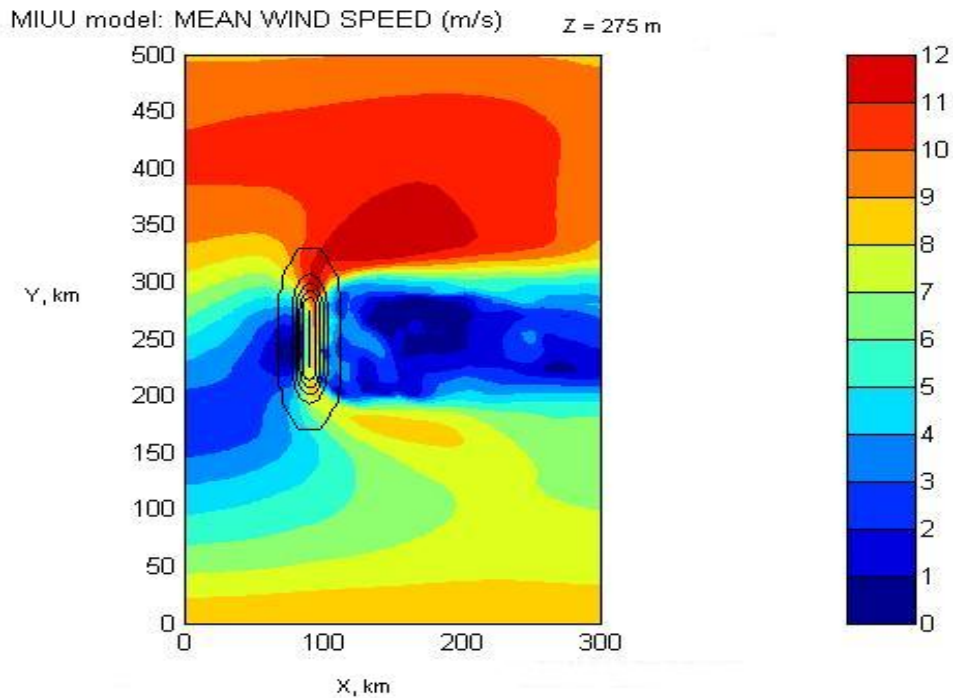
Jaka i olujna bura, barem na sjevernom Jadranu, je protumačena tek sredinom 80-tih godina XX. stoljeća (Smith 1985, 1987, Klemp i Durran 1987) a tek desetak godina kasnije je pokazano, za iste sinoptičke uvjete (tj. za isto osnovno strujanje i statičku stabilnost, U i N) zašto je u prosjeku zimska bura jača od ljetne (Enger i Grisogono 1998). Radi se o modulaciji spomenutog tipa Froudeovog broja, $Fr = U/(NH)$, koji ostaje lokalno superkritičan ($Fr > 1$) niz zavjetrinu i nad relativno toplim morem zimi sve do povratka strujanja u tipično subkritičko strujanje u obliku tzv. hidrauličkog skoka. Nadalje, pitanje pulsacija jake bure, (vrste 'refula') je tek nedavno dotaknuto u relevantnoj literaturi (Belušić i sur. 2004, 2006, 2007b). Numeričkim simulacijama fine prostorno-vremenske rezolucije Belušić i sur. (2007b) pokazuju kako putuju pulsevi bure kraj Senja za vrijeme jedne zimske burine epizode. O određenim turbulentnim aspektima bure može se pronaći u Večenaj i sur. (2010); tamo se posebice diskutira disipacija pripadne turbulencije (vidi kasnije).

Ovdje alternativno možemo govoriti o bezdimenzijskoj visini planine kao inverznom internom Fr broju jer ćemo razmatrati samo homogenu stratificiranu nadolazeću struju zraka konstantnog vjetra. Austrijski i američki znanstvenici su proučili još neke dodatne 3D efekte bure vezane uz planinske prijelaze i vrhove; prijelazi su obično 'izvori' niskih mlaznih struja, a vrhovi lakše proizvode zavjetrinske vrtloge razdvojene spomenutim mlaznim strujama.

Postoje određeni aspekti bure koji nisu detaljno istraženi, kratki pregled pripadnih poznatih spoznaja te djelomična lista nepoznatih pojedinosti o buri se nalazi u Grisogono i Belušić (2009). Prvenstveno nedostaju moderna i detaljna mjerenja, a onda i ciljane simulacije. Neke od idealiziranih simulacija 3D bure su prikazane na Slici 4.7 (prema Grisogono i Enger, 2004); to je tek primjer između mnogobrojnih nedavnih studija nelinearnih planinskih valova. Vidi se pucanje nagnutog nelinearnog planinskog vala koji za ulazni geostrofički vjetar od 8 m/s i zadani vertikalni interni $Fr \sim 0.6$ uspijeva ubrzati srednji vjetar do skoro 12 m/s, ili ga usporiti do skoro -2 m/s na ovoj slici (inače je maksimalan srednji vjetar u toj simulaciji bio preko 14 m/s). Hidraulički skok se javlja oko $x \sim 105$ do 110 km, $z \sim 1000$ do 1500 m. Spomenimo da ovaj tzv. MIUU model koristi 'neproklizavajući' donji rubni uvjet (engl. „no slip“), tj. brzina je nula na tlu. Javlja se horizontalno nehomogeni zavjetrinski granični sloj (vidi kasnije) kao i djelomice oporavljeni planinski val iznad područja pucanja. Vratit ćemo se ovim slikama i ostalim varijablama kasnije u skripti kad dođemo do detaljnijeg pojma kinetičke energije turbulencije.

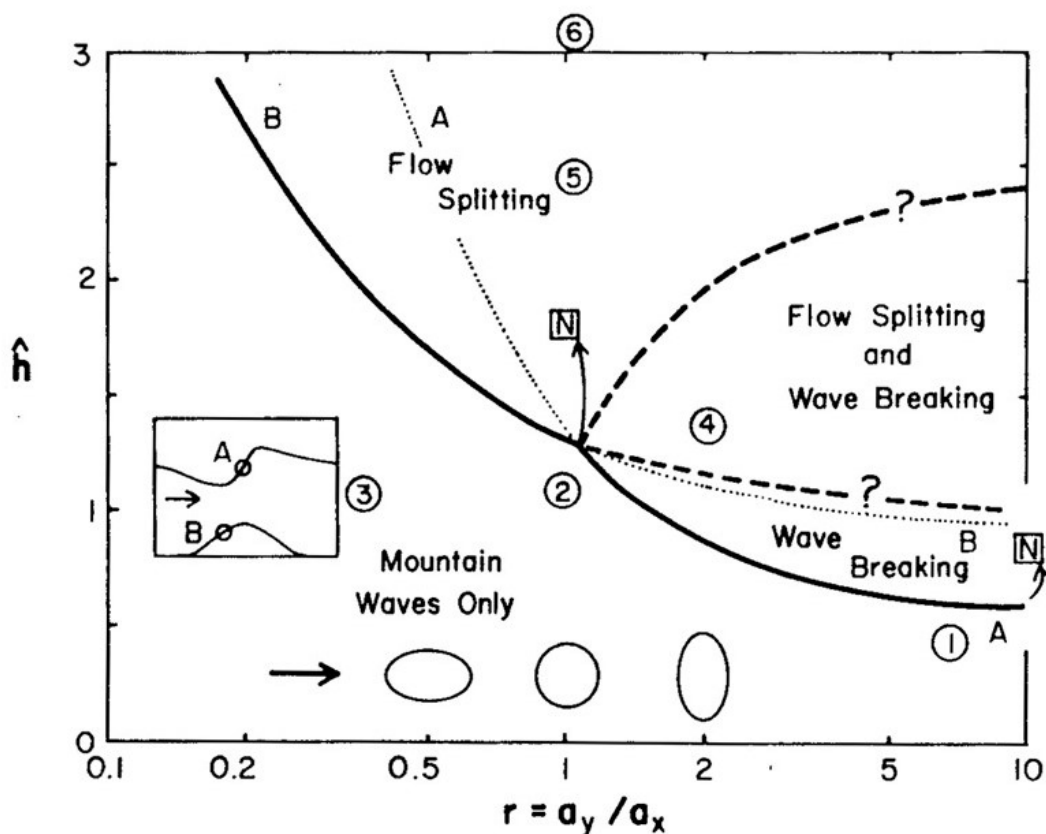


Slika 4.7a Ilustracija nelinearnog 3D strujanja, presjek (x,z) , preko planine duge ~ 100 km, široke 20 km i maksimalne visine 1 km; osnovni vjetar puše s lijeva, 8 m/s i ulazni $Fr \sim 0.6$; prikazana je samo srednja u -komponenta. Dolazi do superkritičkog strujanja u zavjetrini, a u navjetrini je nagomilavanje zraka i djelomična recirkulacija; lomljenje vala je iznad zavjetrine oko $x \sim 95$ km, $z \sim 1100$ do 1700 m (prema Grisogono i Enger 2004). U zavjetrini je dubok i širok horizontalno nehomogeni granični sloj sve do $x \sim 900$ km (nije prikazano).



Slika 4.7b Isto kao 4.7a ali u horizontalnoj ravnini (x,y) na 275 m iznad tla i za ukupnu srednju brzinu. Crne konture prikazuju teren; očit je utjecaj Coriolisove sile jer strujanje nije simetrično obzirom na sredinu planine $y = 250$ km. U ovom nelinearnom strujanju dolazi do stagnacije strujanja u navjetrini, do nesimetričnih niskih mlaznih struja oko $y \sim 170$ km te $y \sim 340$ km za $110 \text{ km} < x < 200 \text{ km}$ (prema Grisogono i Enger 2004).

Parametarski sažetak hidrostatičkog nelinearnog 3D strujanja dao je Smith (1988), Slika 4.8. U parametarskom prostoru omjera duljine i širine planine te bezdimenzijske visine ($\hat{h} = 1/Fr = HN/U$), prikazane su osnovne karakteristike takvog strujanja koje je dominirano lomom valova nad planinom (ili nepusredno u zavjetrini) i stagnacijom strujanja u navjetrini za dovoljno visoke planine, odnosno dovoljno mali pripadni Fr . Postoje novije i potpunije verzije tog dijagrama, ali je bit ista kao i tu na Sl. 4.8.



Slika 4.8 Režim hidrostatičkog uglavnom nelinearnog strujanja preko planine; osi su omjeri duljine i širine planine te bezdimenzijska visina planine, tj. inverzni vertikalni Fr broj (prema Smith 1988). Krivulje A i B su linearne procjene stagniranja strujanja, gdje A sugerira lom vala a B sugerira razdvajanje strujanja. Dalji točkasti nastavci možda i nisu sasvim fizikalni jer se osnivaju na linearnoj teoriji. Uokvireno N označava nelinearne račune sugerirajući da su linearne procjene oko 30% premale. Uokruženi brojevi odgovaraju određenim parametrima glavnog otoka Hawaiia čime su se R.B. Smith i V. Grubišić intenzivno bavili.

Zavjetrinski vrtlozi (engl. *lee eddies, wakes*) se nerjetko javljanju iza relativno visokih i velikih otoka (barem približna hidrostatičnost strujanja, npr. Hawaii) dovoljno udaljenih od kontinenata. Ovisno o karakteru strujanja, što je prvenstveno određeno visinom prepreke, stratifikacijom i brzinom osnovnog toka, javljaju se **3 osnovna režima** strujanja: potpuno subkritički uvjeti (I), prijelaz u superkritičko strujanje i hidraulički skok u zavjetrini (II), te nemogućnost struje da prijeđe vrh prepreka što rezultira separacijom strujanja (III). Režimi II i III su povezani sa zavjetrinskim bitno smanjenim strujanjem ili vrtlogom (dakle i strujanjem suprotnom od osnovne struje); nadalje, može doći do nestabilnosti tih vrtloga (Schär i Smith 1993a. b) i njihovog odvajanja od izvorišta u zavjetrini prepreke. Pripadno „sjenčanje“, ili „otpušanje“ vrtloga se ponekad vidi iza otoka poput Jan Mayen u sjeveroistočnom Atlantiku, iza Madeire, itd. Do spomenute separacije atmosferskog graničnog sloja u principu može doći iz 3 razloga: **1.**) strme prepreke navjetrinskom strujanju pa se u zavjetrini stvara odvojeni granični sloj, **2.**) zbog valno-iducirane separacije (vidi o rotorima), te **3.**) zbog loma valova u zavjetrini.

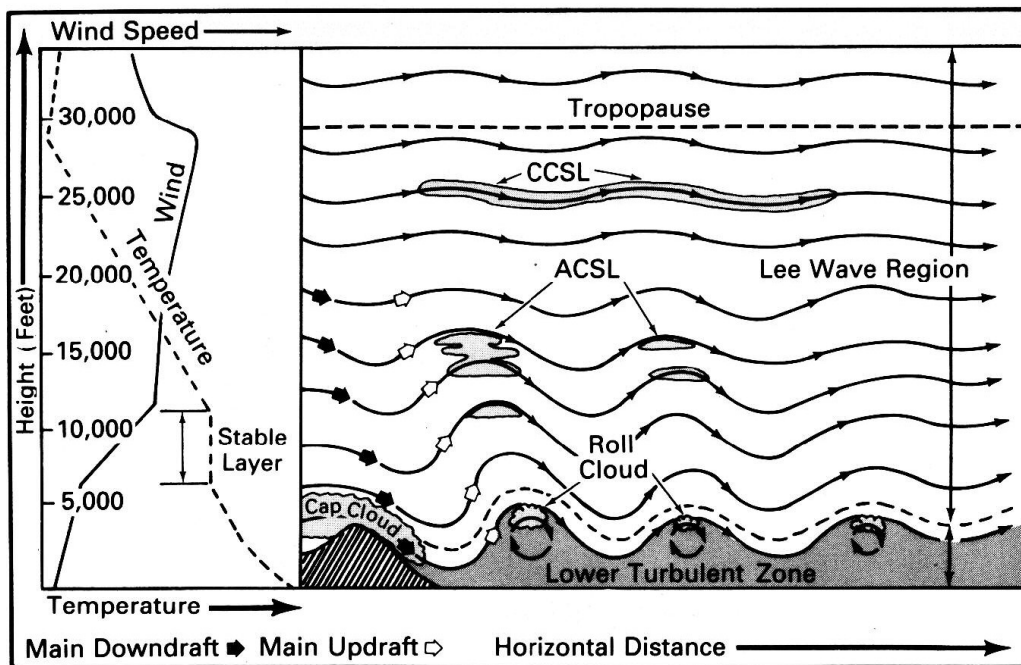
Prethodno spomenuta **3 režima strujanja** se opisuju u diagramu navjetrinskog (uzvodnog) Froudeovog broja, Fr_∞ (uvažava srednju navjetrinsku brzinu i dubinu struje, U_∞ i H_∞ te reduciranu silu težu g^*) i bezdimenzijske visine prepreke (maksimalna visina terena podijeljena s dubinom nadolazeće struje, $M = h_m/H_\infty$). Sva 3 režima strujanja se mogu prikazati u domeni $0 \leq Fr_\infty \leq 1$, $0 \leq M \leq 2$ (Schär i Smith 1993a, b).

Rotori

Strujanje neposredno oko i preko relativno strme prepreke, često stvara i kvazi-periodičke strukture poput koherentnih zavjetrinskih vrtloga određene frekvencije. Ima indikacija da se u slučajevima bez direktnog loma orografskih valova u nižoj troposferi (već kad samo postoji njihovo značajno naginjanje u zavjetrini a lom je moguć lateralno, podalje od rotora, ili ispred rotora) javljaju zavjetrinski 'rotori' (Belušić i sur. 2007b). Rotori imaju horizontalnu os rotacije skoro paralelnu s duljom stranom planine. I u njima dolazi do recirkulacije zraka, značajnih vertikalnih brzina i moguće jake turbulencije; stoga su oni važni i u ometanju prometa. Rotori su fenomen koji pripada i valnoj dinamici (veliki zavjetrinski valovi) i dinamici graničnog sloja (separacija). Pri tome je dominantan mehanizam separacije graničnog sloja koji najčešće nastaje zbog promjene smjera gradijenta tlaka (zbog povećanog tlaka ispod brijega zavjetrinskog vala), a ovaj se suprotstavlja osnovnom prizemnom strujanju u zavjetrini. Ilustracija takvog strujanja je na Sl. 4.9 i Sl. 4.10. U zavjetrini može doći do rezonantnih valova. Simulacija jedne takve burine situacije je prikazana na Sl. 4.10, prikazane su strujnice kao u Belušić i sur. (2007b). Naravno da bi eventualnim uključivanjem ovih nehidrostatičkih procesa prethodni dijagram na Sl. 4.8 postao bitno kompliciraniji.

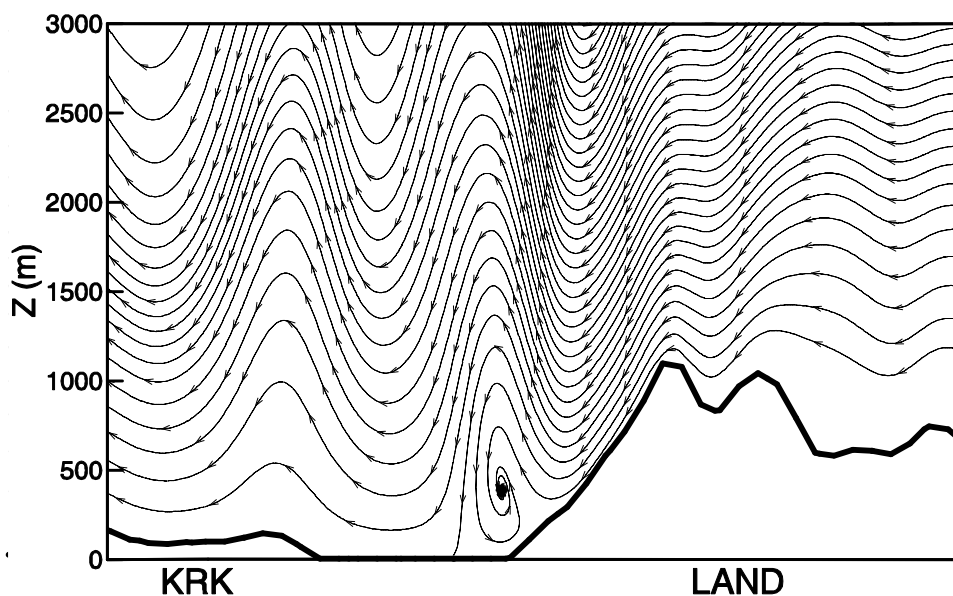
Slika 4.11a skicira tipične atmosferske profile Scorerovog parametra koji se pojavljuje u izrazu (12), te tipične pripadne oblike strujanja. Slično tome, Sl. 4.11b ilustrira neke od mogućih vertikalnih profila nadolazećeg vjetrova ispred planine i najčešće pripadne forme strujanja. Rotori su prikazani zatvorenim strujnicama; manje zatvorene strujnice skiciraju područja turbulencije u slobodnom zraku (tj. dalje od atmosferskog graničnog sloja, odnosno podloge). Slika 4.12 također prikazuje rotore i kvalitativno odgovara slučaju na Sl. 4.11a (gore desno).

U 3D nelinearnom zavjetrinskom strujanju vjerojatno može doći istovremeno do nekoliko različitih prostornih kombinacija loma valova, rotora i hidrauličkih skokova. U periodu 2004-2006. god. Vanda Grubišić je vodila multi-milijunski US\$ projekt T-REX u SAD-u istražujući zavjetrinske rotore istočno od Sierra Nevade.

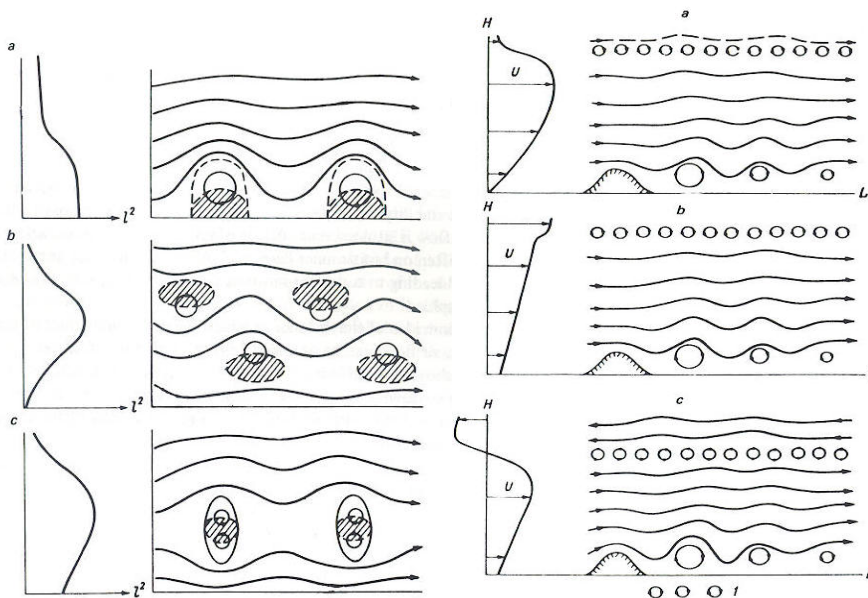


Slika 4.9 Pojednostavljeni prikaz zavjetrinskog strujanja s rotorima. Također su naznačene i ostale značajne pojave poput kapa-oblaka, Ac i Cc oblaka, tropopauze, i profila navjetrinske atmosfere (Izvor: internet).

Postoje velika područja istraživanja nelinearnih valova i njihovih međudjelovanja u različitim dijelovima fizike pa tako i dinamike geofizičkih fluida. Neka od ovih vode u konvekciju i/ili turbulenciju gdje je nelinearnost izrazita, tj. vrlo jaka. Tada se nelinearni efekti ne smiju tretirati kao korekcija linearnoj teoriji, tj. ne vrijedi 'jednostavan' perturbativni razvoj u red nepoznatih polja. Bez numeričkih modela i sustavnih simulacija pojedinih problema s jedne strane, kao i preciznih mjerenja i motrenja s druge strane, nezamisliv je napredak u tim područjima istraživanja (npr. Grisogono i Belušić 2009). Nadalje, nepoznat je kumulativni efekt ovakvih mezoskalnih procesa na energetiku opće cirkulacije atmosfere; konkretno, izgleda da je potcijenjen utjecaj inercijsko-uzgonskih valova i konvekcije na ukupnu valnu energetiku (Nedjeljka Žagar, osobna komunikacija, 2009).



Slika 4.10 Numerička simulacija rotora (vrtloga s horizontalnom osi rotacije) u polju strujnica prema Belušić i sur. (2007b). Vrtlog rotora se nalazi neposredno iznad obale; os mu je na visini od ~ 400 m.



Slika 4.11 Skice tipičnog valnog strujanja u atmosferi. S lijeva na desno: 3 tipična profila Scorerovog parametra ($l^2 = (N/U)^2 - U^{-1} d^2U/dz^2$) i pripadne strujnice (sredina: osjenčano je područje povećane vlažnosti i mogućih oblaka), 3 neovisna moguća vertikalna profila vjetra te pripadne strujnice preko i iza planine (desno). Sličice a, b, c lijevo se odnose na profile Scorerovog parametra, a sličice a, b, c od sredine i desno se odnose na profile vjetra neovisne o prethodne 3 sličice (lijevo). Rotori su skicirani većim zatvorenim strujnicama, a turbulencija slobodnog zraka pripadnim manjim zatvorenim strujnicama. Rotori i turbulencija predstavljaju rizična područja za promet (Izvor: internet).

Ovime uglavnom završavamo o nelinearnim uzgonskim valovima u skripti. Donji dio Sl. 4.5 pa do Sl. 4.12 uglavnom prikazuju nelinearna strujanja (barem u jednom svojem dijelu pojedine slike). Ipak, tamo gdje nema bitnog savijanja i loma valova, često se još uvijek može primijeniti linearna valna teorija (barem kvalitativno). Predavanje o buri na engleskom jeziku može se naći https://video.ucar.edu/mms/mmm/2016/b_grisogono.mp4 (s uvodom, pitanjima i odgovorima traje oko 56 min).

Kvalitativno o lomu uzgonskih valova

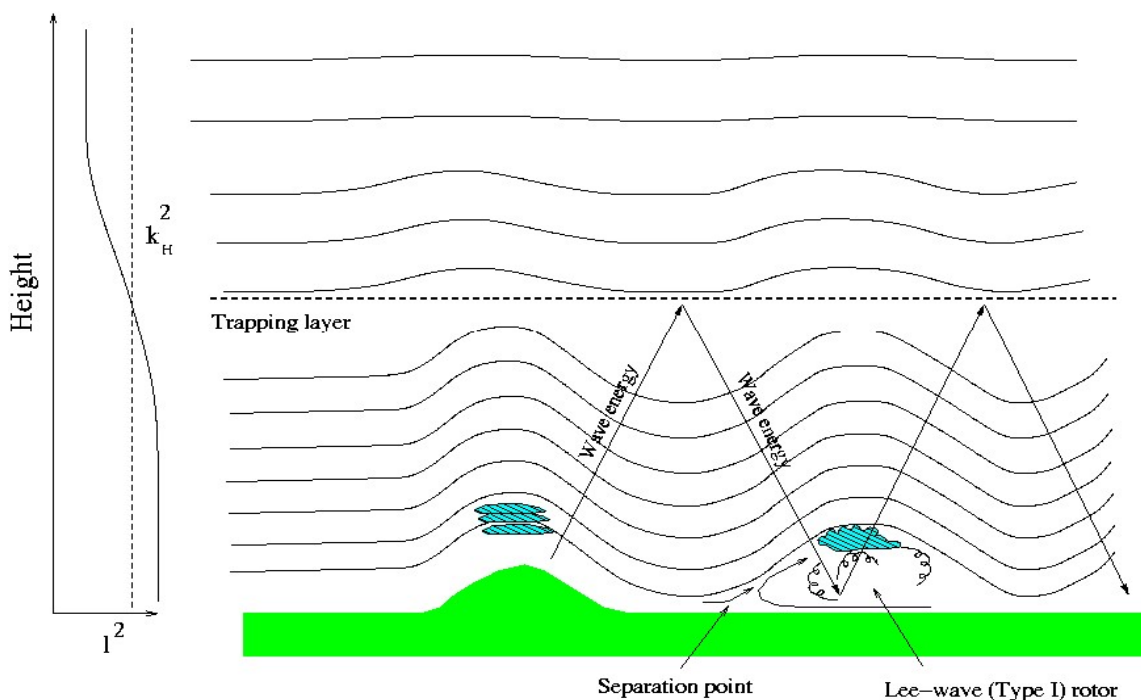
Linearna teorija, jedn. (12), sugerira da oko kritičnog nivoa u vertikalnoj valnoj funkciji dominira prvi član, tj. $[N/(c-U)]^2$ koji vodi do singulariteta (pol 2. reda) za $z \rightarrow z_c$ gdje $c \rightarrow U$. Ukratko, dopuštajući da zbog viskoznosti fazna brzina dobija imaginarni dio, $c = c_R + ic_I$, razvijajući u red TGE iz (12) oko $|\zeta| = |z-z_c| < |z_c|$ i ovdje preskačući logaritamski dopuštene dijelove kompleksne ravnine, uz $c \approx U + \zeta dU/dz + ic_I$, (12) postaje lokalno $d^2w/d\zeta^2 + [N/(U'\zeta + ic_I)]^2 w = 0$. To je onda $w'' + (N/U')^2 \zeta^2 / (1 + (ic_I)/U'\zeta)^2 w = 0$. Uključujući Richardsonov gradijentni broj, Ri , prethodni izraz postaje $w'' + Ri/\zeta^2 / (1 + (ic_I)/U'\zeta)^2 w = 0$ i primjenjujući Frobeniusov razvoj, $w \sim \zeta^p \Sigma a_n \zeta^n$, pripadna inicijalna jedn. sugerira: $p(p-1) + Ri = 0$. Dakle, $p_{1,2} = 1/2 \pm i(Ri - 1/4)^{1/2}$, tj. $w \sim \zeta \exp(1/2 \pm i(Ri - 1/4)^{1/2} \Sigma a_n \zeta^n)$. To ujedno znači da linearan pristup nalaže da $Ri > 1/4$ da bi uzgonski poremećaji bili valovi; u ovoj lineariziranoj priči, val asimptotički ulazi odozdo u kritični sloj i bude apsorbiran zbog viskoznosti (npr. Nappo 2002). Ako je sloj dovoljno tanak i val ima dovoljno veliku amplitudu, može doći do tzv. tuneliranja vala, što je u principu kvantni efekt. Pri tome, val je eksponencijalno manji iznad nego ispod kritičnog nivoa.

Nelinearna teorija i simulacije sugeriraju da oko kritičnog sloja z_c često puta dolazi do pada dinamičke stabilnosti i da stoga sloj u vremenu može dobiti i refleksivne osobine što onda dovodi

do eventualnog pojačanja vala ispod z_c . To ujedno dovodi i do značajnog pojačanja pripadne valne napetosti, npr. 3-4 jačeg nego u linearnom strujanju. Valna napetost je značajno prigušena iznad z_c , no ima slučajeve kako se ovaj može opet pojačati nakon otprilike λ_z .

Zarobljeni valovi – detaljnije

Slike 4.11 i 4.12 prvenstveno govore o zavjetrinskim zarobljenim valovima. Pri tome postoje uzlazne i silazne faze valova čija superpozicija dovodi do vertikalnih faznih linija i horizontalno propagirajućeg rezonantnog zavjetrinskog vala (donji dio Sl. 4.12 i opis između Sl. 4.6a i b).



Slika 4.12 Skica strujanja u kojem se javljaju zarobljeni („utrapljeni“) zavjetrinski valovi. Na lijevoj strani je prikazan horizontalni valni broj kao funkcija visine i pripadni odnos prema Scorerovom parametru. Prema gore propagirana energija je reflektirana od vrha donjeg sloja dolje prema tlu. To dovodi do propagiranja valne energije horizontalno niz vjetar. U ovom slučaju valovi imaju dovoljnu amplitudu da dolazi do razdvajanja strujanja u zavjetrinskom graničnom sloju ispod kriješti valova i pojave rotora (tzv. I vrsta; II vrsta je povezana s hidrauličkim skokom u zavjetrinskoj oluji i općenito je turbulentnija od ove 1. vrste; izvor: Internet).

Kada zarobljeni valovi imaju dovoljno malu amplitudu, opet vrijedi linearna teorija. Iz (11) do (13) zaključujemo da u slučaju dvoslojne atmosfere, gdje se valovi slobodno propagiraju do visine h , a iznad te visine su evanescentni (djelomice se reflektirajući natrag u donji sloj), radi se o vertikalnoj strukturi rješenja tipa

$$w_i(x, z) = \left\{ A_i e^{-\left(k^2 - \left(\frac{N^2}{U^2} - \frac{U''}{U}\right)z\right)^{\frac{1}{2}}} + B_i e^{\left(k^2 - \left(\frac{N^2}{U^2} - \frac{U''}{U}\right)z\right)^{\frac{1}{2}}} \right\} e^{ikx}, \quad (27a)$$

$i = 1, 2$ za donji i gornji sloj; predznak pod korijenom izraza u eksponentu se mijenja kod $z = h$, ovisno da li je kvadrat Scorerovog parametra $l^2 = (N^2/U^2 - U''/U) \approx (N/U)^2$, veći ($= l^2$ ispod h) ili manji od k^2 ; amplitude $A_{1,2}$ i $B_{1,2}$ uobičajeno ovise o rubnim uvjetima. Prikladno je uvesti u (27a) transformaciju $z' = z - h$.

$$\begin{aligned}\hat{w}_1(z') &= A_1 \exp(im_1 z') + B_1 \exp(-im_1 z') \\ \hat{w}_2(z') &= A_2 \exp(im_2 z') + B_2 \exp(-im_2 z')\end{aligned}\quad (27b)$$

Onda je, bez daljeg pisanja kape, $w_1(z' = -h) = 0$, tj. pretpostavi se $h(x) = 0$ što je dovoljno za dobijanje ispravnih stacionarnih modova k . Za samu procjenu amplitude treba ipak biti $w_1(z' = -h) = U\partial h/\partial x$. Nadalje, $w_1(z'=0) = w_2(z'=0)$, kao i pripadne derivacije (to je dinamički rubni uvjet ekvivalentan $p_1(z'=0) = p_2(z'=0)$, što slijedi iz jedn. kontinuiteta i polarizacijske relacije između u i p u x -jedd. gibanja). Konačno, gornji radijacioni uvjet zahtjeva $A_2 = 0$ tako da iznad h postoji samo vertikalno propagirajući val. (Alternativno, za strujanje u kanalu, postavlja se kao gornji rubni uvjet 'poklopac' na visini h_t , tj. $w_2(z'=h_t) = 0$, što dopušta refleksiju vala na gornjoj granici.)

Dakle, zahtjevajući da su vertikalne brzine jednake i kontinuirane (kinematički i dinamički rubni uvjet) na nivou $z = h$, te $l_1^2 > k^2 > l_2^2$, dolazi se do izraza

$$\coth(im_1 h) = m_2/m_1. \quad (28)$$

Izraz (28) se može riješiti samo numerički. Treba voditi računa da su valovi evanescentni u gornjem (imaginarna faza), a propagirajući u donjem sloju (realna faza). Konačno, može se pokazati da za valjano rješenje mora vrijediti da je:

$$l_1^2 - l_2^2 > (\pi/2h)^2, \quad (29)$$

što je ujedno i nužan kriterij za postojanje ove (uvjetno rečeno, glavne) vrste zavjetrinskih zarobljenih valova. To je jedan od glavnih rezultata Scorerove (1949) teorije o zavjetrinskim valovima. Slika 4.13 prikazuje zavjetrinske valove nad Jadranom. Druga vrsta zarobljenih stacionarnih valova se može pojaviti na diskontinuitetu gustoće, odnosno potencijalne temperature θ . U principu, istovremeno se mogu pojaviti obje vrste zarobljenih zavjetrinskih valova; više o tome u npr. Sachsperger i sur. (2015).

Nastavljajući se na ovaj sažetak Scorerove (1949) teorije o linearnim strujanjima, ukratko ćemo proučiti još nekoliko važnih tipova uzgonskih valova. Oni dulji, inercijsko-uzgonski valovi, bliži su subsinoptičkim procesima i pripadnim nestabilnostima; a kraći pak će jednostavnije i lakše voditi k nestabilnostima na maloj skali (veliĉine, npr. Cu oblaka), te konaĉno, k turbulenciji.



Slika 4.13 Fotografija efektata udara bure na površini istočnog Jadrana, te zavjetrinski valni oblaci nad Jadranom 10.02.2015. [snimio T. Kozmar kraj Splita]; *Ac len* se nalaze na visini oko 6.5 -7 km što potvrđuje i aerosondaža Zadar. Značajan dio Jadrana je tada bio prekriven takvim oblacima. Na nižoj su visini *St fra* (desno) i *Cu fra* (lijevo), vjerojatno na visini ~ 100 m (foto T. Kozmar, 2015).

5. UZGONSKO-INERCIJSKI VALOVI

Nastavljamo proučavanje linearnih uzgonskih valova na nešto većoj prostorno-vremenskoj skali tako da rotacija Zemlje počinje utjecati na uzgonske valove. To znači da ovi moraju trajati dulje od nekoliko sati (npr. pola dana i dulje) s horizontalnom skalom usporedivom i malo većom od internog Rossbyjevog radijusa deformacije (npr. preko 150 km) što je u skladu sa Slikom 1 na početku skripte. Uzgonsko-inercijski valovi su oscilacije koje nastaju u inercijsko-težinski stabilnom strujanju (gdje se rotacija i uzgon opiru pomacima česti u horizontali i vertikalni).

Ovi valovi mogu imati utjecaj na mezoskalnu konvekciju i definitivno na simetričnu nestabilnost, mogu djelomice potpomagati baroklinu nestabilnost te sudjelovati u međudjelovanju jakog zmorca i sinoptičkih fronti. Ipak, procesi i efekti vezani uz ove valove još su uvijek slabo dokumentirani. Prvo izvodimo heuristički, tj. plauzibilni prikaz a zatim i egzaktni izvod s lineariziranim sustavom jednadžbi gibanja i termodinamike.

Heuristički izvod za uzgonsko-inercijske valove

Pretpostavljamo da je osnovno strujanje zonalno usmjeren geostrofički vjetar u_g , te da pomak česti ne perturbira polje tlaka u prvoj aproksimaciji. Tada, aproksimativne jednadžbe gibanja postaju:

$$\frac{Du}{Dt} = fv = f \frac{D\delta y}{Dt} \quad (1)$$

$$\frac{Dv}{Dt} = f(u_g - u) = \frac{D^2 \delta y}{Dt^2} . \quad (2)$$

Promatramo čest na položaju $y = y_0$, koja se giba sa osnovnim geostrofičkim strujanjem. Ako se čest pomakne poprijeko osnovnom strujanju za iznos δy , javlja se nova zonalna brzina kao integrirani oblik jednadžbe (1):

$$u(y_0 + \delta y) = u_g(y_0) + f\delta y . \quad (3)$$

Geostrofički vjetar na položaju $y_0 + \delta y$ se može aproksimirati kao:

$$u_g(y_0 + \delta y) = u_g(y_0) + \frac{\partial u_g}{\partial y} \delta y . \quad (4)$$

Kada pomoću jednadžbi (3) i (4) procijenimo vrijednost jednadžbe (2) u točki $y_0 + \delta y$, dobijemo:

$$\frac{Dv}{Dt} = \frac{D^2 \delta y}{Dt^2} = -f \left(f - \frac{\partial u_g}{\partial y} \right) \delta y = -f \frac{\partial M}{\partial y} \delta y , \quad (5)$$

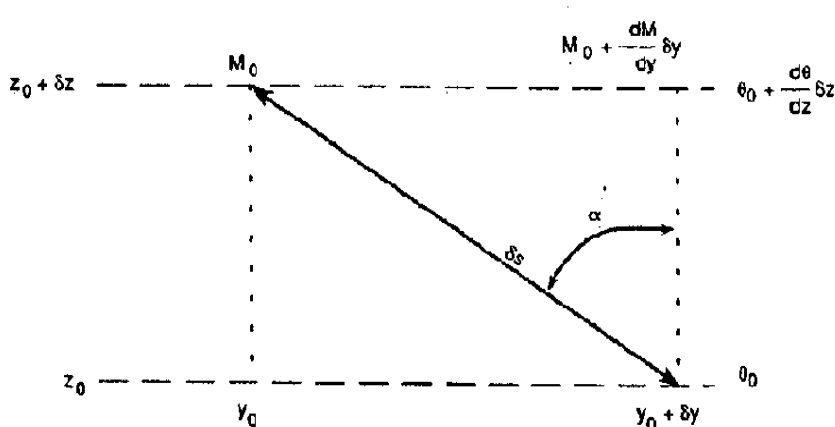
gdje smo definirali apsolutni zonalni impuls: $M \equiv fy - u_g$. Time smo dobili uvjetno jednadžbu harmoničkog oscilatora:

$$\ddot{\delta y} + f \left(f - \frac{\partial u_g}{\partial y} \right) \delta y = 0 , \quad (6a)$$

gdje je dvotočka iznad 1. člana u (6a) dvostruka derivacija po vremenu. Rezultantno gibanje ovisi o predznaku zagrade, tj. da li će čest biti prisiljena da se vrati u početni položaj ili će se ubrzavati udaljavajući se od početnog položaja, ovisi o predznaku člana:

$$f \frac{\partial M}{\partial y} = f \left(f - \frac{\partial u_g}{\partial y} \right) \left. \begin{array}{l} > 0 \text{ stabilno} \\ = 0 \text{ neutralno} \\ < 0 \text{ nestabilno} \end{array} \right\}. \quad (6b)$$

Iz (6) se naslućuje da ovi valovi mogu imati veze s inercijskom nestabilnošću. Slika 5.1 ilustrira pripadno stabilno harmoničko uzgonsko-inercijsko gibanje. Radi se o eliptički polariziranom valu.



Slika 5.1: Putanja osciliranja česti u meridionalnoj ravnini za uzgonsko-inercijske valove. Oznake vidi u tekstu (Holton 1992).

Jednadžbu disperzije možemo dobiti metodom česti u ovom pojednostavljenom pristupu (koja kao metoda općenito ne vrijedi za valove). Promatramo oscilacije česti duž putanje zakrenute za kut α od vertikale, u (y, z) ravnini. Čest pomaknuta za δs duž putanje će doživjeti vertikalni pomak $\delta z = \delta s \cos \alpha$, te meridionalni pomak $\delta y = \delta s \sin \alpha$. Sila uzgona po jedinici mase za takvu čest iznosi $-N^2 \delta z$ (N je opet uzgonska frekvencija), pa je komponenta sile uzgona paralelna nagibu putanje česti $-N^2 \delta z \cos \alpha$. Za meridionalne pomake, δy , komponenta Coriolisove sile paralelna nagibu putanje česti je $-f^2 \delta y \sin \alpha$. Pretpostavili smo da je na nekoj geografskoj širini osnovno geostrofičko strujanje konstantno. Time smo dobili jednadžbu harmoničkog oscilatora za pomak česti zbog perturbacije δs :

$$\frac{D^2 \delta s}{Dt^2} = -(f \sin \alpha)^2 \delta s - (N \cos \alpha)^2 \delta s \quad (7)$$

$$v^2 = N^2 \cos^2 \alpha + f^2 \sin^2 \alpha \quad (8)$$

u rasponu $f \leq |v| \leq N$. Kada se nagib putanje približava vertikali (mali kut α) prevladava uzgonska komponenta. Općenito je $N^2 > f^2$, što znači da frekvencije uzgonsko-inercijskih valova moraju ležati između uzgonskih i inercijskih oscilacija.

Dakle za mali kut dominiraju uzgonske oscilacije, dok se rastom kuta α nagib putanje približava horizontali i prevladavaju inercijske oscilacije. Periodi uzgonsko - inercijskih valova u srednjim geografskim širinama iznose od oko 15 minuta do 15-tak sati. Rotacijski efekti postaju važni kada su magnitude članova sa desne strane jednadžbe (8) usporedive, tj. kada je $N^2 \cos^2 \alpha \approx f^2 \sin^2 \alpha$ ($\tan^2 \alpha \approx N^2/f^2 \sim 10^4$), pa je tada $v \ll N$. Znači, rotacija Zemlje značajno utječe samo na uzgonske valove niskih frekvencija i oni imaju vrlo male nagibe putanja česti obzirom na horizontalu. Nadalje, (7) i (8) sugeriraju da ovi valovi mogu imati veze s izentropsko-inercijskom nestabilnošću.

Egzaktni izvod za uzgonsko inercijske valove - linearizirani sustav jednadžbi

Pretpostavljamo da je 3D sustav u hidrostatičkoj ravnoteži (dobra pretpostavka jer je za ove mezoskalno dugoperiodičke valove horizontalna skala mnogo veća od vertikalne; ova se može ispustiti tako da se uključi lokalna promjena w u 3. jedn. ispod s lijeve strane pa da sustav bude s jednom pretpostavkom manje), da vrijedi Boussinesqova aproksimacija, te da je osnovno stanje bez vjetra ($u_0 = 0$). Uz ove pretpostavke te da nema srednjeg vjetra, dobijemo linearizirani sustav jedn. gibanja gdje su perturbacije standardno napisane kao ($'$):

$$\frac{\partial u'}{\partial t} - fv' + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + fu' + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial y} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} - \frac{\theta'}{\theta} g = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} + w' \frac{d\bar{\theta}}{dz} = 0. \quad (13)$$

Nadalje, npr. pomoću hidrostatičke relacije (11) eliminiramo θ' iz (13):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} \right) + N^2 w' = 0. \quad (14)$$

Ako pretpostavimo rješenja ovih jednadžbi jednostavnog valnog oblika:

$$(u', v', w', \theta', p'/\rho_0) = \text{Re} \left[(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{\theta}, \hat{p}) \exp[i(kx + ly + mz - \nu t)] \right]$$

i uvrstimo ta pretpostavljena rješenja u jednadžbe (9), (10) i (14), dobijemo konstantne amplitude članova:

$$\hat{u} = (\nu^2 - f^2)^{-1} (\nu k + if) \hat{p} \quad (15)$$

$$\hat{v} = (\nu^2 - f^2)^{-1} (\nu l - ikf) \hat{p} \quad (16)$$

$$\hat{w} = -(\nu m / N^2) \hat{p}, \quad (17)$$

koje se ponekad nazivaju jedn. polarizacije (jer pokazuju smjer pojedinog poremećaja nekog polja u odnosu na drugo u kompleksnoj ravnini). Na primjer, dijeleći (15) i (16) dobije se odnos između u -poremećaja i v -poremećaja i tako se zaključi da ovi valovi dovode do anticiklonalne rotacije horizontalnog polja valnog gibanja. Izrazi (15), (16) i (17) pomoću perturbirane jednadžbe (tzv. plitkog) kontinuiteta (12), tj. Boussinesqove aproksimacije: $k\hat{u} + l\hat{v} + m\hat{w} = 0$, rezultiraju $(F_u + F_v + F_w)\hat{p} = 0$ što dalje dovodi do jednadžbe disperzije za hidrostatičke uzgonsko-inercijske valove (u zadnjoj zagradi su pojedini F -ovi iz (15) do (17) i taj cijeli izraz mora biti $= 0$). Nadalje, primjetimo da Boussinesqova aproksimacija u jedn. kontinuiteta ujedno znači $\vec{k} \cdot \vec{u} = 0$, tj. ukupna brzina valnih oscilacija je okomita na valni vektor. Relacija disperzije za uzgonsko-inercijske valove je:

$$\nu^2 = f^2 + N^2(k^2 + l^2)m^{-2}. \quad (18a)$$

Da je isti račun proveden za nehidrostatičko strujanje (onda (11) uključuje i lokalnu promjenu od w):

$$\nu^2 = \frac{N^2(k^2 + l^2) + f^2 m^2}{m^2 + k^2 + l^2}, \quad (18b)$$

što je isti rezultat kao u prošlom Poglavlju 4, jedn. (10,b*). Nerjetko se (18b) može pojednostaviti tako da je inercijski član izvučen izvan razlomka aproksimativno kao f^2 . Za hidrostatičke valove vrijedi $(k^2 + l^2)/m^2 \ll 1$ tako da je uvjet za vertikalno propagiranje valova $|f| < |\nu| \ll N$. Dakle, (18) je rubni slučaj od (8) kad je zadovoljeno da: $\sin^2 \alpha \rightarrow 1$, $\cos^2 \alpha = (k^2 + l^2)/(m^2 + k^2 + l^2)$. Primijetimo formalnu sličnost (18) s disperzijom plitkih inercijsko-težinskih valova gdje bi umjesto $(N/m)^2$ stajao pripadni kvadrat fazne brzine, $c_0^2 = gH$. Prikladna usporedba u (18) je izračunati (18a) i (18b) za iste tipične ulazne parametre, npr. $\lambda_{x,y,z} = (50 \text{ km}, 200 \text{ km}, 5 \text{ km})$, $N = 0.01/\text{s}$ i $f = 0.0001/\text{s}$ i naravno, komentirati rezultat.

Eliminacijom \hat{p} iz jednadžbi (15) i (16), za slučaj $l = 0$ dobijemo pojednostavljenu relaciju polarizacije $\hat{v} = -if\hat{u}/\nu$, iz koje možemo potvrditi da ako je \hat{u} realna veličina, valno - perturbirane horizontalne komponente brzine su:

$$u' = \hat{u} \cos(kx + mz - \nu t), \quad v' = \hat{u} (f/\nu) \sin(kx + mz - \nu t), \quad (19)$$

tako da vektor horizontalne brzine rotira anticiklonalno u vremenu (na sjevernoj hemisferi). Česti se gibaju po eliptičkim trajektorijama u ravnini ortogonalnoj na vektor valnog broja. Iz jednadžbe (19) također se vidi da vektor horizontalne brzine zakreće anticiklonalno s visinom za valove za koje energija propagira prema gore, kao i $c_{gz} > 0$.

Anticiklonalno zakretanje horizontalnog vjetrovisinom i u vremenu je primarna metoda za identificiranje uzgonsko-inercijskih valova iz meteoroloških podataka (npr. učestalih sondaža, barem svaka 2-3 sata, po mogućnosti svaki sat). Ovi se valovi ponekad vide kao oblačne zakrivljene, npr. polukružne sporo-disperzirajuće pruge na satelitskim snimkama, od nekoliko sati do npr. pola dana, kako propagiraju uz relativno blagu i sporu promjenu ukupnog oblika.

Oni, u linearnom obliku, prenose impuls i energiju, ali ne i toplinu. Ovi valovi mogu dovesti do izentropsko-inercijske, tj. simetrične nestabilnosti.

I u slučaju uzgonsko-inercijskih valova postoje nelinearni procesi koji su prilično slični onima za obične nelinearne uzgonske valove. No ovi sad počinju osjećati i utjecaj rotacije zemlje a kad se nelinearnom sustavu (npr. planinski valovi jake bure) pridoda linearna komponenta, odgovor takvog sustava nije linearan. Pojačano nagomilavanje zraka na jednoj strani navjetrine jača pripadnu nisku mlaznu struju čija nestabilnost međudjeluje s pucajućim valovima u zavjetrini kao i s horizontalno nehomogenim zavjetrinskim atmosferskim graničnim slojem. Tek novija literatura, od sredine 90-ih godina na ovamo, dotiče ovu problematiku (npr. Grisogono i Enger, 2004; Kraljević i Grisogono, 2006). Primjer takve nesimetrije se vidi i na Slici 4.7 prošlog poglavlja. Ovdje završavamo osnovno tumačenje relativno duljih i srednjih mezoskalnih valova.

Dinamički sličan vjetar jakoj i olujnoj buri je vjetar föhn, ili foehn u Alpama. Mada se dugo vjerovalo da je tzv. Hanov mehanizam (pseudoadijabatički proces ispadanja oborine u navjetrini planine i odgovarajući porast temperature u zavjetrini) odgovoran za jaki foehn, primarni mehanizam jest lom planinskih valova i dotok povećane Θ_e iz gornje atmosfere, dok je Hanov mehanizam od sekundarne važnosti (slično kao što se ne može jaka i pogotovo orkanska bura objasniti termodinamičkim tumačenjem tj. katabatičkim vjetrom).

I na kraju ove cjeline, da smo nakon uzgonskih valova krenuli na manju skalju, umjesto na veću kao u ovoj lekciji, vjerojatno najzanimljiviji fenomen u stratificiranom strujanju bili bi Kelvin-Helmholtzovi valovi; oni slijede u idućoj lekciji.

6. KELVIN-HELMHOLTZovi VALOVI (KHV)

Ovo je najreprezentativnija vrsta cijele klase malih valova u geofizičkim fluidima koji nastaju zbog međugre uzgona, smicanja i različitih profila osnovnog vjetrova i gustoće fluida [Holmboeovi (Hölmboe) valovi, Taylorovi valovi, itd.]. Kod njih u roku od nekoliko minuta može doći do nestabilnosti, naginjanja, savijanja, preokretanja i konačnog pucanja što najčešće završava oslobađanjem turbulentne energije te konačnom disipacijom. Ovo je jedan od najočitijih primjera međujelovanja val - turbulencija. Na slici 6.1 su dvije fotografije KHV snimljene u razmaku od nekoliko minuta.



Slika 6.1 Primjer Kelvin-Helmholtzovih valova (KHV) nad sjevero-zapadnim horizontom prije nailaska tople fronte (kraj listopada 1999., ~ 25 km sjeverno od Stockholma, Švedska). Gore lijevo je relativno visok Sc , a KHV se pojavljuju u udaljenom sloju drugog, tankog raspadajućeg Sc -a.



Slika 6.2 Još jedan primjer Kelvin-Helmholtzovih valova (KHV) u atmosferi. Pred oluju se pojavio nagnuti sloj St s KHV; ispod je gusta nakupina $Cu\ fra$ a iznad su dijelovi Ns i Cb (Izvor: internet).

Nakon kratkog vremena, oko 10-tak min valovi nestanu, no slični valovi se opet mogu pojaviti ako osnovni uvjeti ostaju isti. Ponovno nailazimo na koncept turbulencije, tj. vrlo pojačanog miješanja fluida, zbog pucanja i disipacije valova. Turbulencija se može očekivati na mjestima presavijanja i uvijanja valova na Sl. 6.1 i 6.2. Jedan od načina kako dolazi do takve turbulencije upravo je opisan i dobro se može kvalitativno pratiti linearnom analizom nestabilnosti (bar u početnoj fazi razvoja). Prije toga, navesti ćemo nekoliko primjera atmosferske turbulencije.

Od nestabilnosti k turbulenciji

Vjerojatno najjednostavniji put od laminarnog k turbulentnom strujanju jest kroz sukcesivnu pojavu nestabilnosti (npr. početno valnog) strujanja. Tradicionalno se to tumači porastom *Reynoldsovog* broja, $Re = UL/\nu$ gdje je U karakteristična brzina strujanja, L je dominantna geometrijska dimenzija a ν je kinematička viskoznost (što je osobina fluida). Reynoldsov broj uspoređuje utjecaj inercijskih i viskoznih efekata strujanja. Kad taj broj prijeđe kritičnu vrijednost za strujanje pojedinog fluida, gibanje kvalitativno mijenja svoj karakter i postaje turbulentno, tj. izuzetno jako izmješano u svojem toku. Strujnice se isprepletu, poput špageta u sosu, pa njihov koncept prestaje biti koristan u turbulentnom strujanju. Turbulentnost je osobina strujanja, a ne samog (pojedinog) fluida.

Tradicionalno se govori o termičkoj i mehaničkoj turbulenciji; ta je podjela načinjena prema izvoru turbulencije. Turbulencija u atmosferskom graničnom sloju, taj najdulji sloj atmosfere se ponekad naziva i sloj miješanja (*mixed layer*), je nerijetko pod utjecajem konvekcije (iako se dobro promiješani sloj može oformiti i u područjima jakog vjetra). Izvori termalne konvekcije uključuju prijenos topline s tople površine tla, radijacijsko ohlađivanje s vrha oblačnog pokrova, isparavanje oborine, itd.

Čak i kad je konvekcija dominantan mehanizam stvaranja i podržavanja turbulencije, obično postoji i smicanje vjetra kroz granični sloj i u stvari cijelu atmosferu, i to smicanje isto pridonosi stvaranju turbulencije. Ta je situacija srodnija *CAT-u* (*clear-air turbulence*) i smatra se da je često puta povezana s nastankom i raspadanjem zračnih valova znanih pod nazivom Kelvin-Helmholtzovi valovi. Kelvin-Helmholtzovi valovi (KHV) nisu uobičajeni težinski valovi, nego su to evanescentni valovi na nekoj plohi diskontinuiteta; ipak ih ubrajamo u težinske valove u širem smislu. Prvo slijedi heuristički (plauzibilni) izvod, a zatim detaljniji ali djelomičan izvod.

Prikaz (ne)stabilnosti KHV najjednostavnije ide preko pripadne kinetičke i potencijalne energije. Prvo definiramo dva homogena polubeskonačna priljubljena sloja geofizičkog fluida, svaki sa svojom gustoćom, odnosno potencijalnom temperaturom i brzinom (gornji: $0 \leq z < \infty$, donji: $-\infty < z \leq 0$, za svaki x) što čini promatrani sustav.

$$\begin{array}{c} \rho_1, \theta_1, U_1 \longrightarrow \\ \hline \rho_2, \theta_2, U_2 \longrightarrow \end{array}$$

$$\delta\theta = \frac{\partial\theta}{\partial z} \delta z \quad (1)$$

$$\delta PE = \frac{g}{\theta_0} \frac{\partial\theta}{\partial z} (\delta z)^2 = (N\delta z)^2. \quad (2)$$

Ovi slojevi mogu u mnogo omjera izmiješati svoje osobine (∞ neprebrojivo, jer se radi o kontinuumu), no nas zanima krajnji, ekstremni slučaj. Nepotrebno je koristiti varijacioni račun da se pronade ekstremno miješanje ovih slojeva. Izrazom (2) vidimo kolika je razlika u potencijalnoj energiji slojeva; pogledajmo maksimalnu razliku u kinetičkoj energiji prije i poslije miješanja slojeva odnosno česti fluida. Jedan sloj ima početnu brzinu U , a drugi $U + \delta U$, dok je konačna brzina $U + \delta U/2$ u najekstremnijoj realizaciji miješanja tih slojeva:

$$\delta KE = KE_{final} - KE_{start} = \frac{1}{2} [2U_{final}^2 - U_{start:1+2}^2] = \frac{1}{2} \left[2 \left(U + \frac{\delta U}{2} \right)^2 - U^2 - (U + \delta U)^2 \right] = -\frac{(\delta U)^2}{4}. \quad (3)$$

Dakle, (3) prikazuje razliku kinetičke enegije između konačnog i početnog stanja sustava. Pogledajmo ukupnu energiju.

$$\delta PE + \delta KE \equiv B, \quad (4)$$

gdje za $B > 0$ sustav prima energiju (od poremećaja) i *stabilan* je,
za $B = 0$ sustav je *neutralan*,
a $B < 0$ sustav gubi energiju (predajući je poremećajima) i *nestabilan* je.

Razumno je očekivati da je B relativno mali, tj. blizu nuli (ispravna pretpostavka za linearno strujanje, razumna čak i za blago do umjereno nelinearno strujanje); korištenjem limesa u nulu za δz i δU uvrštavanjem dobijemo:

$$\frac{g}{\theta_0} \partial_z \theta (\delta z)^2 - \left(\frac{\delta U}{2} \right)^2 \approx 0, \quad (5a)$$

gdje na desnoj strani od (5a) možemo jednako dobro zamisliti da postoji znak $() \leq 0$ i $() \geq 0$ pa onda slijedi

$$\frac{g}{\theta_0} \partial_z \theta (\delta z)^2 - \left(\frac{\delta U}{2} \right)^2 > 0 \quad (5b)$$

za dinamičku stabilnost, tj. početno pretpostavljena statička stabilnost (što nije ovdje nužno) i pripadna PE nadvladavaju KE ; a da je „ $<$ “, nejednakost u (5b), onda bi to predstavljalo dinamičku nestabilnost. Dijeljenjem (5a) s $(\delta U)^2$ daje izraz

$$R_{i,CRIT} = \frac{g}{\theta_0} \frac{\partial_z \theta}{\left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2} \approx \frac{1}{4}. \quad (6)$$

Isti izraz definiramo kao **Richardsonov gradijentni broj**.

$$\frac{N^2}{S^2} = \frac{g}{\theta_0} \frac{\partial_z \theta}{\left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2} \equiv R_i = Ri_{GRAD} \quad (7)$$

$Ri_{GRAD} > \frac{1}{4}$ upućuje na *dinamičku stabilnost*, obzirom na KHV (ali ne i na turbulenciju!)

$Ri_{GRAD} \approx \frac{1}{4}$ upućuje na *dinamičku neutralnost*, obzirom na KHV

$Ri_{GRAD} < \frac{1}{4}$ upućuje na *dinamičku nestabilnost* slojeva, obzirom na KHV.

Ovaj broj, definiran u (7), je osnovni, tradicionalni način definiranja turbulentnog stanja geofizičkog fluida. To je jedan od najvažnijih parametara u meteorologiji. Više o turbulenciji se nalazi u zadnjem dijelu ove skripte. Kasnije ćemo kritizirati spomenuti uvjet za dinamičku stabilnost i općenito postojanje pripadnog kritičnog $Ri \approx 1/4$ broja.

Skraćeni izvod za KHV

Vratimo se na skicu strujanja iznad (1); umjesto θ , najčešće se računa s gustoćom. Za takva 2 nestratificirana polubeskonačna fluida potrebno je samo znati dvije komponente perturbacije brzine i perturbaciju tlaka; to znači, x i z komponentu gibanja te jednažbu kontinuiteta. Dakle, rješava se za svaki sloj (5), (6) i (7) iz 4. poglavlja. Za sve 3 spomenute perturbacije se pretpostavi valno rješenje proporcionalno s $\exp\{ik(x - ct)\}$ koje eksponencijalno opada s udaljenošću od valovite plohe sučelja (*interface*) dvaju slojeva. Samo još treba zadati detalje rubnih uvjeta. Konkretno, zadajemo kinematički (brzine) i dinamički (tlak) rubni uvjet na kontaktnoj plohi fluida. Česti fluida uz kontaktnu plohu se gibaju zajedno s tom plohom; to se zadaje za gornji i donji sloj i obično se linearizira. Tlak mora biti kontinuiran uz spomenutu plohu. Najčešće se to opisuje nestacionarnom Bernoullijevom jednažbom i dalje se provodi

uobičajena linearna perturbativna analiza i traži se disperzijska relacija za faznu brzinu (ili frekvenciju) poremećaja. Detaljan račun se nalazi u npr. Nappo (2002).

Nakon otprilike jedne stranice računa, dozvoljavajući da je fazna brzina c kompleksna veličina, nalazi se fazna brzina KHV koja je dana izrazom:

$$c_{KHV} = \frac{\rho_1 U_1 + \rho_2 U_2}{\rho_1 + \rho_2} \pm \sqrt{\frac{g}{k} \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2} - \rho_1 \rho_2 \frac{(U_1 - U_2)^2}{(\rho_1 + \rho_2)^2}}, \quad (8)$$

gdje se indeksi 1 i 2 odnose kao i iznad (1), tj. 1 je gornji a 2 donji sloj. Prvi član na desnoj strani je srednja brzina strujanja. Očito je da do nestabilnosti dolazi radi slojeva različite gustoće ρ i brzine U . Za veliki k javlja se nestabilnost i prisutni su kratki valovi, a za relativno mali k slojevi su stabilni i nastaju dugi valovi. Također, uvijek postoji kritični k , odnosno kritična valna duljina, koja je neutralna obzirom na vremenski razvoj valova. Za najkraće valove između npr. vode i ulja, površinska napetost igra stabilizirajuću ulogu, slično kao što čini i sila teža u (8). S druge pak strane, vidimo da svako smicanje ima destabilizirajuću ulogu za KHV. Ovi valovi se mogu pojaviti uz inverzije koje su često popraćene smicanjem. Uz takve slojeve se nerjetko javljaju onda i drugi valovi i druge nestabilnosti. Uglavnom, vjeruje se da KHV i njihova nestabilnost najčešće dovode do lokalnog smanjenja R_i i pojave turbulencije u čistom zraku (CAT). Izraz (8) se jednostavno prebacuje iz korištenja gustoće u potencijalnu temperaturu za atmosfersku primjenu jer je Boussinesqova aproksimacija izvrsno ispunjena za KHV.

Stoga se u praktičnoj avio-meteorologiji i uzima da $R_i \leq 1$ znači veliku vjerojatnost za CAT. Primijetimo da se taj kriterij također dobro slaže s onim za simetričnu nestabilnost (2. poglavlje). Piloti dobivaju prognostičke i dijagnostičke karte s označenim područjima gdje se očekuje CAT kao i ostalim tipovima opasnog vremena za letenje (duboka konvekcija, visinske fronte, zaleđivanje, itd.).

Netko se može zamisliti zašto smo ovdje izveli kriterij kritičnog $R_i = 1/4$ u (6), a sad 'razmazujemo' taj kriterij do ≤ 1 . Ima nekoliko razloga za to; vjerojatno je najbitniji taj da se R_i kao lokalna mjera dinamičke (i statičke) stabilnosti u praksi određuje u konačnim razlikama. To povlači da je diskretizirani R_i proporcionalan s vertikalnom rezolucijom mjerenja Δz . To je loša osobina jer R_i 'ne vidi' manje poremećaje koji mogu rasti na manjoj karakterističnoj skali od razlučene (recimo $\Delta z \sim 50$ m) i u dinamički stabilnom sloju takav R_i može pogrešno pripisati povećanu stabilnost (veliki R_i) cijelom sloju. Dakle, $R_i > 0$ u konačnim razlikama je obično veći od stvarnog pa je dobro i zbog tog precjenjivanja malo povećati kritični R_i . Konačno, R_i ide u beskonačnost u bilo kojoj mlaznoj struji kao i u minimumu vjetra. Izgleda da različiti tipovi strujanja imaju različite pripadne kritične R_i ; stoga postaje upitna općenitost ovog kriterija za dinamičku stabilnost stujanja (npr. Baklanov i Grisogono 2007, Mauritsen i sur. 2007, Grisogono i Belušić 2008). Ipak, u praksi se i dalje koristi s umjerenim uspjehom otprilike $0.25 < R_{i, crit} < 1.5$ ovisno o konkretnoj problematici, tipu modela, itd. Prije no nastavimo ozbiljnije kritizirati ovaj bezdimenzijski broj i pripadne koncepte o stabilnosti, potrebno je naučiti nešto više o R_i . Ovim poglavljem završavamo proučavanje valova i prelazimo na novu veliku cjelinu – konvekciju.

7. UVOD U KONVEKCIJU

Iako voda u zraku zauzima izuzetno mali postotak, svega oko 0.25% mase atmosfere, što odgovara otprilike 2.5 cm dubokom vodenom sloju, voda je izuzetno važna za radijativne i dinamičke procese u atmosferi. Voda ima gotovo kontinuirani spektar apsorpcije zračenja i već je ta činjenica ujedno i manifestacija neobične efektivnosti vode i njezine pare u interakcijama s termalnim zračenjem. Voda je najvažniji apsorber sunčevog zračenja u troposferi jer su njene molekule vrlo neizotropne i zajedno s tipičnim radijusom oblačnih kapljica, koji je usporediv s valnom duljinom termalnog zračenja, voda u svoja 3 agregatna stanja u atmosferi bitno utječe a skoro sve procese u atmosferi. Vlažna atmosfera je transparentna za vidljivu svjetlost, ali gotovo nepropusna za infracrveno zračenje. Nadalje, to je povezano s dinamikom i suhoadijabatičkom te mokroadijabatičkom stopom ohlađivanja atmosfere visinom, nestabilnosti i miješanjem zraka.

Troposfera je u prosjeku u radijaciono-konvektivnoj ravnoteži; ova je uvelike diktirana vodom (u sva 3 agregatna stanja). Tokom dana, većina oblaka u prosjeku hladi donju površinu (pogotovo niski oblaci). Noću svi oblaci pak griju podlogu. Sveprisutnost vode u atmosferi pojačava svako vanjsko forsiranje i to je jedno od ključnih točaka u shvaćanju klimatskih promjena tokom zadnjih 30-ak god. I kako rastu koncentracije relativno dugotrajnih plinova staklenika u atmosferi, poput CO₂, tako se povećava netransparentnost atmosfere za infracrveno zračenje. To dovodi do malog porasta temperature troposfere koja pak dozvoljava progresivno sve više vodene pare u zraku (tlak vodene pare raste eksponencijalno s porastom temperature), progresivno više mokrih (vjerojatno i u prosjeku dubljih i intenzivnijih) konvektivnih procesa, itd.

Nakon kratke definicije, ponovit ćemo princip uvjetne nestabilnosti i dio osnova termodinamike atmosfere (gradivo Dinamičke meteorologije I). Zatim diskutiramo tipove konvektivnih oblaka u atmosferi. Duboka konvekcija je turbulentan, 3D, nehidrostatički proces za koji ne vrijedi Boussinesqova aproksimacija (ako je plitka konvekcija u pitanju, onda može vrijediti ta aproksimacija). Do pojave konvekcije može doći na svim skalama (od mikroskale do makroskale); radi se o spontanom miješanju fluida koje dominira promatranom dinamikom. Tradicionalno se u dinamici geofizičkih fluida pod konvekcijom smatra pojačano vertikalno gibanje i miješanje fluida (dok je advekcija, najgrublje rečeno, horizontalno gibanje fluida). Mjera laboratorijske konvekcije je Rayleighjev broj

$$R_a = \frac{gz_i^3 \Delta T}{\nu \kappa T} \quad (1)$$

gdje je:

ν - kinematička viskoznost (m²/s, za zrak je 1.56·10⁻⁵ m²/s, a za vodu oko 15 puta manja),

κ - kinematička konduktivnost (m²/s, za zrak 2.17 ·10⁻⁵ m²/s, a za vodu oko 10 puta manja pri 20°C),

ΔT – razlika u temperaturi između donjeg toplijeg i gornjeg hladnijeg sloja međusobno udaljenih z_i .

R_a je bezdimenzijski omjer između produkta ubrzanja zbog uzgona i konvekcije topline i produkta kinematičke viskoznosti i konduktivnosti topline (tj. uvjetno rečeno, između osnovno-dinamičkih i viskoznih sila). Kada R_a prijeđe kritičnu vrijednost (~10³, ovisno o vrsti fluida, npr. 1708, ili 3686, itd.) dolazi do spontane konvekcije. To se naziva Rayleigh-Bénardova konvekcija. U praksi se ovaj omjer eventualno koristi kod tzv. plitke konvekcije (npr. Sc naoblaka), ali s relativno malo uspjeha jer laboratorijska i atmosferska mjerenja nisu sasvim u skladu po tom pitanju. Grubo rečeno, kao pri grijanju vode u loncu, kad (1) prijeđe kritičnu vrijednost, dolazi do kvalitativne promjene u gibanju fluida i spontana konvekcija postaje očita. Kvalitativno slična kaskada procesa je uobičajena u nelinearnoj fizici, u npr. teoriji kaosa, itd.

Mada su osnovni procesi uzgona isti u mezoskalnoj ćelijskoj konvekciji i klasičnoj Rayleigh-Bénardovoj konvekciji, ova druga, laboratorijska konvekcija ne može objasniti nekoliko prirodnih osobina atmosfere konvekcije. Na primjer, omjeri dubine i širine konvektivnih ćelija su bitno različiti za 1. i 2. navedeni tip konvekcije. Takve i druge razlike prvenstveno se javljaju zbog zagrijavanja latentnom toplinom pri faznim promjenama u oblacima te zbog dinamike na većoj skali. Nadalje, kad se zamijene kinematička viskoznost i konduktivnost njihovim tipičnim vrtložnim (turbulentnim) veličinama, te dubinom konvekcije $z_i \sim 1$ km, dobije se $R_a \sim 10^5$ (tj. puno veći no u laboratoriju).

Plitka konvekcija je važna za ventiliranje atmosferskog graničnog sloja, uvlačenje zraka iz tzv. slobodne atmosfere u isti granični sloj, za smanjenje vlažnosti u graničnom sloju te za eventualno preokondicioniranje srednje troposfere za duboku konvekciju. Plitka konvekcija se pragmatički modelira u prognostičkim modelima veće skale kao modifikacija Richardsonovog gradijentnog broja adekvatnim omjerima miješanja u kombinaciji s ostalim mokro-adijabatičkim varijablama.

Do kriterija za kritičnost u (1) se alternativno dolazi rješavajući kompletan linearizirani sustav jednačini; radi li se analitički, onda se sustav obično svodi na jednu diferencijalnu jednačinu 6. reda (2. reda za u i w -komponentu, te još 2 reda za temperaturu), a za zadane profile gustoće, tlaka i temperature. Tretiranje rubnih uvjeta tada općenito nije jednostavno zbog visokog reda derivacija. Model konvekcije tipa Rayleigh-Bénardove konvekcije, je najjednostavniji slučaj tzv. "dvostruke difuzije" kakva se može javljati u npr. moru zbog vertikalne raspodjele saliniteta i temperature.

Ekvivalentna potencijalna temperatura Θ_e

To je potencijalna temperatura Θ_e koju bi čest imala kada bi se sva vodena para iz nje kondenzirala, a dobivena latentna toplina utrošila na zagrijavanje (kasnije suhe, tj. osušene) česti dovedene na nivo od 1000 hPa. Temperatura česti može se svesti na određenu potencijalnu vrijednost ako se čest diže od početnog nivoa do nivoa kondenzacije (LCL, *lifting condensation level*) i nakon toga po mokroj adijabati do točke gdje je sva vodena para kondenzirala i napustila čest. Zatim se čest po suhoj adijabati spusti na nivo 1000 hPa. Zbog kompresije temperatura česti će se povećati i Θ_e će biti veća od početne temperature. Ovaj proces je ireverzibilan i pseudoadijabatički (voda koja napušta čest odnosi mali dio topline).

Ako je q_s zasićeni omjer miješanja, prvi zakon termodinamike kaže da je približno

$$d\bar{h} = -L_c dq_s, \quad (2)$$

gdje je L_c latentna toplina kondenzacije, a $d\bar{h}$ diferencijal entalpije (nepotpuni diferencijal). Pomoću drugog zakona termodinamike

$$dS = \frac{d\bar{h}}{T} \quad (3)$$

i definicije entropije

$$dS = c_p d(\ln \Theta / \Theta_{CONST}), \quad (4)$$

može se izraziti ekvivalentna potencijalna temperatura zasićene česti. Primjetimo u (3) da je $1/T$ integrirajući faktor koji pretvara prije nepotpuni u sada potpuni diferencijal, entropiju. Ovo je

jedna od vjerojatno najapstraktnijih definicija temperature. Kombinacija (2), (3) i (4) daje približno:

$$c_p d(\ln \Theta) = -\frac{L_c dq_s}{T} \rightarrow d(\ln \Theta) \approx -d\left(\frac{L_c q_s}{c_p T}\right). \quad (5)$$

Integracijom (5) od početnog stanja (Θ, q_s, T) do stanja gdje je $q_s \approx 0$ dobije se izraz za Θ_e zasićene česti:

$$\Theta_e \approx \Theta e^{\frac{L_c q_s}{T_{LCL} C_p}}, \quad (6)$$

gdje je T_{LCL} temperatura česti koja adijabatičkim širenjem dođe do nivoa kondenzacije. Naravno da se do (6) dolazi i korištenjem termodinamičkih dijagrama, npr. emagrama. Ako se q_s zamjeni sa q (stvarni omjer mješanja za čest) izraz (6) vrijedi i za nezasićenu čest. Ekvivalentna potencijalna temperatura je očuvana veličina u pseudoadijabatičkim i suhoadijabatičkim pomacima česti.

Na osnovi mokre statičke energije,

$$d(C_p T + gz + L_c q) \approx C_p T d(\ln(\Theta / \Theta_{CONST})), \quad (5a)$$

također se može izvesti aproksimativna ali solidna definicija ekvivalentne potencijalne temperature. U (5a) prva 2 člana na lijevoj strani se tradicionalno zovu 'suha statička energija' (ili Montgomeryjeva funkcija). Inače, lijeva strana od (5a) je približno očuvana u adijabatičkim suhim i mokrim procesima; koristi se u nekim numeričkim prognostičkim modelima ('*numerical weather prediction models*', NWP modeli) kao osnovno termodinamičko prognostičko polje. Iz toga se onda proračunava npr. apsolutna temp. T , ako je potrebna kao takva u npr. računalnim rutinama za zračenje u atmosferi.

Pseudoadijabatička stopa ohlađivanja

Još jednom, potencijalna temperatura Θ definirana je kao

$$\Theta = T \left(\frac{p_0}{p}\right)^{R/c_p}. \quad (7)$$

Ako se (7) logaritmiraju i deriviraju po vertikali (prešutno zadržavamo sve konstante pri logaritmiranju jer logaritam dimenzijske veličine nije dobro definiran, striktno govoreći, a pri deriviranju te konstante ionako otpadnu, isto vidi (4)) dobije se:

$$c_p \frac{d \ln \Theta}{dz} = c_p \frac{d \ln T}{dz} - R \frac{d \ln p}{dz}. \quad (8)$$

Ovaj izraz (8), kada se uvrsti u (5), daje:

$$\frac{d \ln T}{dz} - \frac{R}{c_p} \frac{d \ln p}{dz} = -\frac{L_c}{c_p T} \frac{dq_s}{dz}; \quad (9)$$

primjenom jednadžbe hidrostatičke te jednadžbe stanja, slijedi (pretp. da je vertikalna geometrijska promjena ovdje i glavna, tj. principalna, kao da je to d/dt , a ostalo su ovdje parcijalne derivacije):

$$T \frac{d \ln T}{dz} - \frac{R}{c_p} T \frac{d \ln p}{dz} = -\frac{L_c}{c_p} \left[\left(\frac{\partial q_s}{\partial T} \right)_p \frac{dT}{dz} + \left(\frac{\partial q_s}{\partial p} \right)_T \frac{dp}{dz} \right] \rightarrow$$

$$\frac{dT}{dz} + \frac{g}{c_p} = -\frac{L_c}{c_p} \left[\left(\frac{\partial q_s}{\partial T} \right)_p \frac{dT}{dz} - \left(\frac{\partial q_s}{\partial p} \right)_T \rho g \right]. \quad (10)$$

Sada je još potrebno definirati:

$$q_s \cong \frac{\varepsilon e_s}{p} \quad \& \quad \frac{de_s}{dT} = \frac{\varepsilon L_c e_s}{RT^2} \rightarrow$$

$$\left(\frac{\partial q_s}{\partial p} \right)_T \approx -\frac{q_s}{p}, \quad (11)$$

$$\left(\frac{\partial q_s}{\partial T} \right)_p \approx \frac{\varepsilon}{p} \frac{\partial e_s}{\partial T} = \frac{\varepsilon^2 L_c e_s}{pRT^2} = \frac{\varepsilon L_c q_s}{RT^2}, \quad (12)$$

gdje je ε omjer molekularne mase vode i mase suhog zraka ($\varepsilon \approx 0.622$), odnosno pripadni inverzni omjer plinskih konstanti (tj. 287/461). Uvrštavanjem (11) i (12) u (10) dobije se izraz za pseudoadijabatičku stopu ohlađivanja Γ_s :

$$\Gamma_s = -\frac{dT}{dz} = \Gamma_d \frac{\left[1 + \frac{L_c q_s}{RT} \right]}{\left[1 + \frac{\varepsilon L_c^2 q_s}{c_p RT^2} \right]}, \quad (13)$$

gdje je $\Gamma_d = \frac{g}{c_p}$ suhoadijabatička stopa ohlađivanja. Vidi se da je (13) uvijek manji od $\Gamma_d = \frac{g}{c_p}$, osim u suhoj atmosferi. To ima značajne posljedice na stabilnost vlažnog zraka. Nerjetko je opravdano koristiti pojednostavljene oblike izraza (13), ili čak ostaviti lijeve strane od (11) i (12) kao parcijalne diferencijale u (10), odnosno (13). Bitno je da je $\Gamma_d > \Gamma_s$.

Uvjetna nestabilnost

Ovo je zadnja mini-lekcija ponavljanja osnova atmosfere termodinamike prije no krenemo u osnove dinamike duboke mokre konvekcije, konkretno u makro-strukturu konvektivnih oblaka. Ako stopa ohlađivanja Γ leži između suhoadijabatičkih i pseudoadijabatičkih vrijednosti (13), atmosfera je uvjetno nestabilna ($\Gamma_s < \Gamma < \Gamma_d$). Odnosno, ako je čest zasićena i toplija od okoliša, nastavit će se dizati, a ako je nezasićena i hladnija od okoliša, spuštati će se - pod uvjetom da je bila početno pomaknuta iz ravnoteže mirne atmosfere.

Stabilnost česti može se izraziti i pomoću Θ_e^* , ekvivalentne potencijalne temperature hipotetičke atmosfere koja ima istu termalnu strukturu kao i stvarna atmosfera, ali je zasićena (Slika 7.1). Ako na (6) djeluju operatori 'ln' i 'd', dobije se izraz za Θ_e^* :

$$d \ln \Theta_e^* = d \ln \Theta + d \left(\frac{L_c q_s}{c_p T} \right), \quad (14)$$

gdje je T stvarna temperatura. Promatrajmo dva nivoa sa zadanom pripadnom potencijalnom temperaturom:



Ako se čest iste potencijalne temperature (kružić na gornjoj ilustraciji) kao i okoliš s nivoa $z_0 - \delta z$ podigne na nivo z_0 , obično nivo slobodne konvekcije, potencijalna temperatura će joj biti:

$$\Theta_1 = \left(\Theta_0 - \frac{\partial \Theta}{\partial z} \delta z \right) + \delta \Theta, \quad (15)$$

gdje je $\delta \Theta$ promjena potencijalne temperature česti zbog kondenzacije duž vertikalne udaljenosti δz . Sada se $\delta \Theta$ može izraziti iz (5):

$$\frac{\delta \Theta}{\Theta} \approx -\delta \left(\frac{L_c q_s}{c_p T} \right) \approx -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{L_c q_s}{c_p T} \right) \delta z. \quad (16)$$

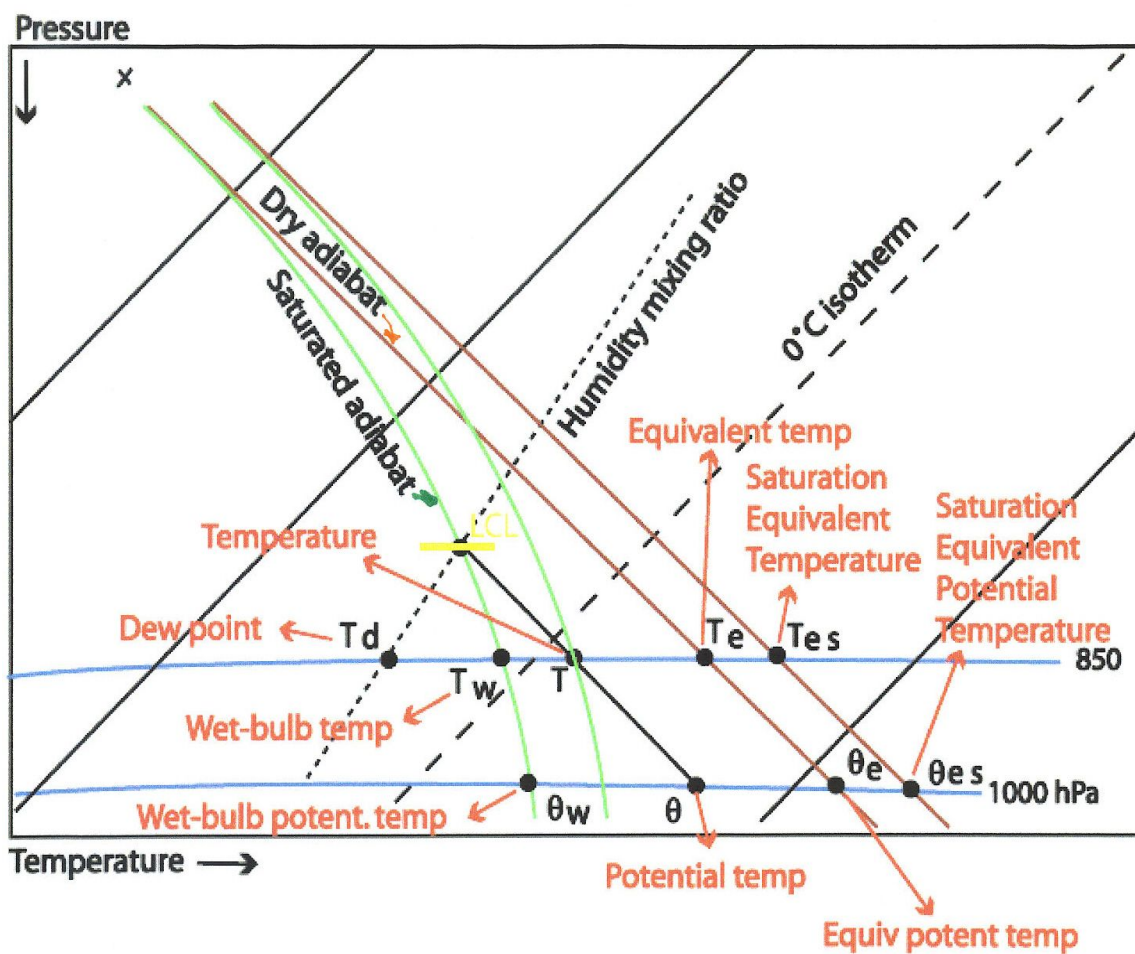
Veličina $\frac{\Theta_1 - \Theta_0}{\Theta_0}$ koja se javlja u (15) proporcionalna je uzgonu česti. Pomoću (14), (15) i (16) slijedi:

$$\frac{\Theta_1 - \Theta_0}{\Theta_0} = -\frac{1}{\Theta_0} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial z} \delta z - \delta \Theta \right) \approx -\left[\frac{1}{\Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{L_c q_s}{c_p T} \right) \right] \delta z \approx -\frac{\partial \ln \Theta_e^*}{\partial z} \delta z. \quad (17)$$

Zasićena čest će na nivou z_0 biti toplija od okoliša ako vrijedi da je $\Theta_1 > \Theta_0$ i čest će se nastaviti podizati. Iz (17) tada slijedi da kriterij uvjetne stabilnost glasi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta_e^*}{\partial z} > 0 & \quad \text{uvjetno stabilna atmosfera} \\ \frac{\partial \Theta_e^*}{\partial z} < 0 & \quad \text{uvjetno nestabilna atmosfera} \\ \frac{\partial \Theta_e^*}{\partial z} = 0 & \quad \text{neutralna atmosfera.} \end{aligned}$$

Prešutno je pretpostavljeno da je 'nešto' u početku pomaklo čest i dovelo do početnog poremećaja. Takav poremećaj se ponekad pojavi spontano, npr. zbog diferencijalnog zagrijavanja podloge koja ima različiti albedo, hrapavost podloge i specifičnu toplinu na svojim pojedinim dijelovima pa će se prvo pojaviti mali toplinski mlaz, termal. Ipak, češće dolazi do konvergencije strujanja i vodene pare tjerane vjetrom, što dalje dovodi do podizanja zraka i onda spontane kondenzacije. Češći je ovakav slučaj razvoja pojačane konvekcije gdje je važna sinhronizacija dinamičkih efekata. Slika 7.1 prikazuje tipični termodinamički dijagram, emagram.



Slika 7.1 Emagram i pripadne oznake različitih vrsta temperature (uz naznake tlaka i vrste adijabate), nivo kondenzacije (LCL, *lifting condensation level*). Takvi su dijagrami od velike važnosti u procjeni mezoskalnih aktivnosti, posebice duboke konvekcije (Izvor: internet).

Forsirana konvekcija zbog orografskog podizanja zraka je također veliki mogući uzrok potrebnog početnog poremećaja (dakle, prije je postojalo povoljno sinoptičko strujanje koje je uopće dovelo do gibanja zraka preko planine); zatim, to može biti fronta zmorca, itd. Na primjer, u Istri ljeti nerjetko dolazi do sudaranja zmorca što dolazi s jugoistočne i zapadne obale; uz dovoljno vlažnosti, javlja se jaka duboka konvekcija nad središnjim dijelom Istre u popodnevним satima.

Tipovi ćelija

Duboka konvekcija je termodinamički tjerano intenzivno turbulentno mješanje gdje vertikalna gibanja podižu česti iz niže atmosfere u slojeve iznad 500hPa. Hoće li doći do duboke konvekcije u grubo se određuje pomoću $R_{i, BULK}$, tj. bulk Richardsonovog broja koji može biti definiran na sljedeći jednostavan način:

$$R_{i, BULK} = \frac{N^2 H^2}{(\Delta u)^2}, \quad (18)$$

gdje je N^2 (opet) kvadrat uzgonske frekvencije (sada negativna vrijednost!), H je debljina promatranog sloja zraka a Δu je ukupno smicanje vjetra (recimo nekoliko km, nerjetko 6 km). Vidimo da je (18) integralna (generalna) verzija gradijentnog Ri broja. Ako je otprilike, vrlo grubo rečeno, $-100 < R_{i, BULK} < -1$, konvekcija postoji. U (18) je zastupljen tzv. CAPE (*Convective Available Potential Energy*), tj. maksimalna raspoloživa potencijalna energija za konvekciju, te smicanje. I dok CAPE daje intenzitet dubokoj konvekciji izvantropskih širina, smicanje daje oblik, tj. formu toj istoj konvekciji. Intenzitet i oblik (forma) konvekcije su najbitniji osnovni parametri koji grubo opisuju duboku mokru konvekciju. Alternativno, ako se koristi CAPE, da se izbjegne negativan predznak u brojniku uz $CAPE \gg 0$, (18) se piše s CAPE-om u brojniku (onda je uobičajeno promijeniti predznak desne strane, ali u dinamičkoj meteorologiji, zbog jednostavnosti, pokušavamo pamtiiti što manje definicija i obuhvatiti što više pojava, a ne definicija).

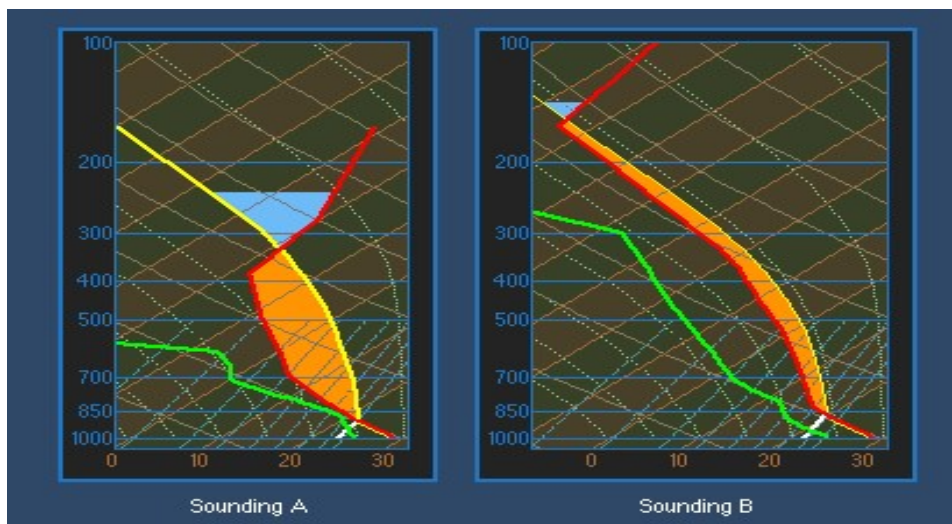
Detalji o CAPE-u. To je dostupna potencijalna energija za konvekciju; ona daje mjeru maksimalne moguće kinetičke energije koju eventualno može imati nestabilna čest. Pretpostavljamo u ovom pojednostavljenom izvodu da se čest podiže bez miješanja i da se trenutno (instantno) prilagođava okolnom tlaku zraka. Maksimalna kinetička energija po jedinici mase B , tj. CAPE, koju može poprimiti neka čest podižući se iz stanja mirovanja s nivoa slobodne konvekcije do područja neutralnog uzgona dana je izrazom:

$$\frac{w_{\max}^2}{2} = \int_{z_{NSK}}^{z_{NNU}} g \left(\frac{T_{\text{čest}} - T_{\text{okolina}}}{T_{\text{okolina}}} \right) dz \equiv B, \quad (19)$$

gdje je w_{\max}^2 kvadrat maksimalne moguće brzine, a z_{NSK} i z_{NNU} su nivo slobodne konvekcije, odnosno nivo neutralnog uzgona. U (19) je sva raspoloživa potencijalna energija prešla u kinetičku energiju vertikalnog gibanja česti; nadalje, pretpostavljeno je da je početna brzina $w_0 = 0$. Dakle, $w_{\max} \approx (2CAPE)^{1/2}$, mada se ponekad to pojednostavljuje i bez faktora 2. Alternativno (18) uz (19) postaje u primjeni, uz promjenu predznaka u brojniku, ponekad definiran kao:

$$R_{i, BULK} = \frac{B}{(\Delta u)^2}.$$

Slika 7.2 se nadovezuje na Sl. 7.1 i ilustrira dvije idealizirane sondaže; lijeva sondaža (A) ima puno veću razliku temperature između dižućeg zraka i okoliša, nego desna sondaža (B). Znači, mada zrak u (A) ima isti CAPE kao i zrak u (B), narančasta područja, ipak zrak u (A) je spremniji za intenzivnu konvekciju nego pripadni u (B). Drugim rječima, pripadna vremenska situacija ima veći potencijal za razvoj duboke konvekcije u slučaju A, nego u B.



Slika 7.2 Dvije idealizirane sondaže (x-os je temp. y-os je tlak); lijeva (A) ima veću vjerojatnost za razvoj konvekcije jer je pripadni CAPE koncentriran u tanjem sloju nego na sondaži desno (B). Inače, CAPE je isti za obje sondaže (Izvor: COMET, internet). Konvektivna inhibicija ("kočenje" konvekcije, trokutasta površina iznad CAPE-površine) je veća u 1. slučaju, što znači da se CAPE može dulje vrijeme nakupljati u tome slučaju.

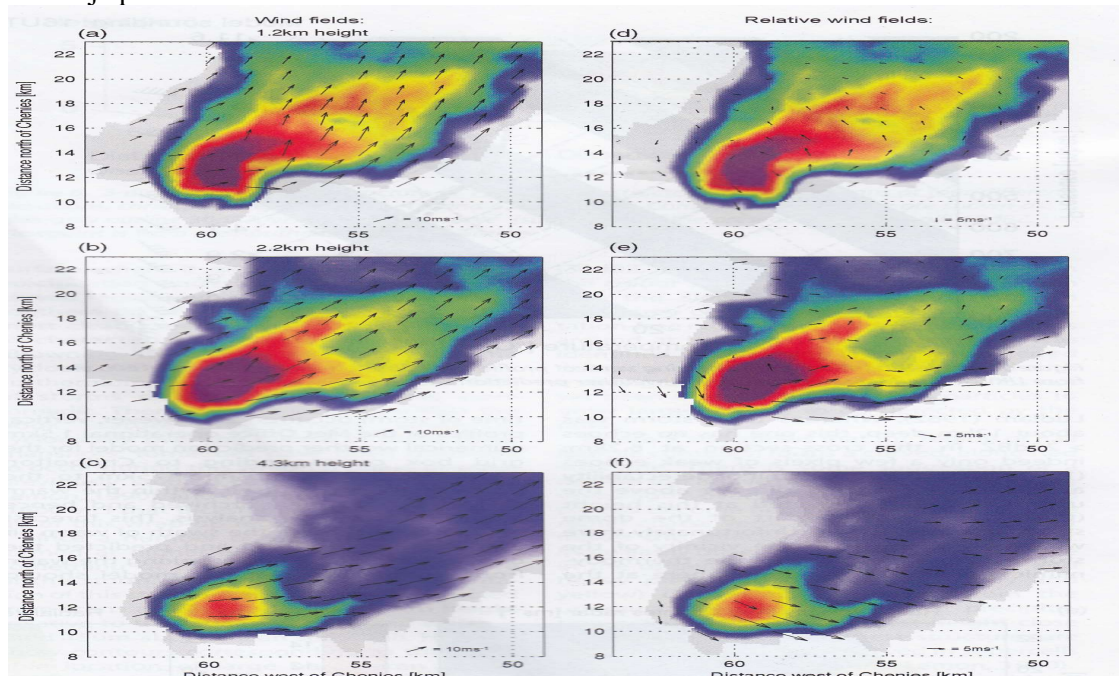
Konvektivne ćelije otpočinju svoj razvoj iz tzv. termala, tj. skoro vertikalnog mlaza toplog zraka (poput gljive). Ovi se javljaju zbog nehomogene podloge i prikladnih lokalnih mikrodinamičkih uvjeta (npr. smicanje na skali $\Delta x \approx 500$ m) pri super-adijabatičkom vertikalnom temperaturnom gradijentu. Koncept CAPE-a je vrlo koristan u izvantropskim širinama, dok u tropskim krajevima je od manje koristi jer su tamo nerjetko drugačiji mehanizmi duboke mokre konvekcije (latentna toplina, tipovi strujanja, itd. jer u tropima gotovo uvijek postoji CAPE).

Na mezoskali postoje tri osnovna tipa : jedinične, multi- i superćelije. Ako je vertikalno smicanje u donja 4 km atmosfere relativno malo, otprilike $<10\text{m/s}/(4\text{km})$ kroz spomenutu dubinu atmosfere, mogu se pojaviti samo jedinične ćelije, tj. obični Cu con i eventualno manji Cb. Kratkog su trajanja, ~ 30 do 60 min, dimenzije $L_x \sim 5$ do 10 km. Obično se gibaju unutar srednjeg strujanja u donjih ~ 8 km atmosfere dajući umjereni pljusak u trajanju od 10-ak min. Kada je vertikalno smicanje u donja 4 km umjereno jako, ~ 10 do 20 m/s/(4km), stvaraju se multićelije. Sastavljene su od više jediničnih Cb kratkoga vjeka, ali u cjelini traju više sati, recimo 6 do 10 sati. Multićelije daju kvazi-periodične pljuskove u trajanju od nekoliko sati, ili dulje, ovisno o tome da li postoji mehanizam obnavljanja multićelija; mogu dovesti do lokalnih poplava. Grupa multićelija može stvoriti olujnu mezoskalnu frontu, s izuzetno jakim horizontalnim smicanjem vjetra, grmljavinom i jakim pljuskovima; takve olujne formacije se često nazivaju „*squall-line*“. Ove olujne tvorevine, „olujne pruge“, točnije (kvazi)linijski organizirani konvektivni sustavi (LOKS) najčešće nisu direktno povezane sa sinoptičkim frontama, češće se javljaju u toplom sektoru ciklone, duge su nekoliko stotina km a široke su nekoliko desetaka km. Ako postoje prikladni uvjeti, multićelije se mogu regenerirati tijekom nekoliko dana i tako najjednostavnije dovode do poplava nad određenim područjem. Nije sasvim jasno kada nakupina multićelija može formirati LOKS, a kada i zašto se to u drugim uvjetima ne dogodi. Spomenuti LOKS-ovi mogu biti dugi nekoliko stotina km, široke su nekoliko desetaka km, ili ~ 100 km, te mogu trajati od nekoliko sati do čak i nekoliko dana; stvaraju olujan vjetar i tuču. Dugo-postojeći LOKS-ovi se nazivaju „*derechos*“ (španjolski: ravan); putuju više stotina km i mogu proizvesti veliku štetu zbog vjetra i tuče na širem području svojeg pojavljivanja. I tornada se nekad mogu pojaviti oko prednjeg ruba olujnih pruga, mada se ova najčešće javljaju u superćelijskim Cb-ima.

Svi *Cb*-ovi mogu proizvesti sijevanje i grmljavinu ako imaju dovoljno ledenih kristala. Većina olujnih oblaka bez značajne ledene faze ne mogu proizvesti munje jer je međusobno sudaranje kristalića leda ono što primarno dovodi do stvaranja elektriciteta u oblacima. Sijevanje je rezultat razdvajanja električnog naboja unutar olujnog oblaka nastalog zbog mokre konvekcije. Izmjerena kratkotrajna struja tijekom sijevanja munja iznosi preko 10^4 A, ponekad čak i preko 10^5 A; pripadni električni napon može prijeći i višestruko 10^6 V. Pri tome dolazi i do grmljavine jer se pri probodu naboja do podloge zrak naglo širi, prelazeći kratkotrajno iz plinovitog stanja u plazmu pri temperaturi i do iznad $2 \cdot 10^4$ C; to dovodi do udarnog zvučnog efekta. Postoje određene najnovije indikacije da pri jakome sjevanju i grmljavini dolazi čak i do kratkotrajnog stvaranja γ -zraka uz anihilaciju elektron – pozitron.

Superćelije mogu biti samostalne ili međusobno organizirane; tada se često puta radi o tzv. mezoskalnom konvektivnom sustavu ('mesoscale convective system', MCS) koji nerjetko dovodi do poplava na svojem putu. Ako MCS sporo putuje, može dovesti do katastrofalnih poplava na području veličine npr. dvostruke Slavonije. Jedna od osnovnih osobina im je razvoj vlastite rotacije. Superćelija ima vrlo organiziranu unutrašnju strukturu što joj omogućuje kontinuirano propagiranje i trajanje od više sati. Mnoge superćelije proizvode karakteristični zavijutak u svojem Doppler-radarskom odrazu polja brzine („kuka“ ili „udica“, eng. 'hook'); to je najčešći znak da može doći do tornadogeneze i pojave tornada, mada tek relativno mali broj ovih „udičastih“ odraza doista dovode do tornada. Iako superćelije mogu u ekstremnim uvjetima stvoriti tornada, sva tornada ne nastaju nužno iz superćelijskih oblaka. Tornadogeneza nije sasvim objašnjen proces; radi se o zakretanju i podizanju izuzetno jake horizontalne vrtložnosti ('tilting') gdje latentna toplina igra važnu, ali još ne do kraja razjašnjenu ulogu. Tornado se razvija u području gdje se susreću strujanje uvjetno nestabilnog okoliša i izlazni tok ('gust front') iz super-oblaka, što najčešće predstavlja okludiranu mezo-frontu; to međudjelovanje se javlja ili ispod tzv. mezociklone (jer superćelija razvija svoju vlastitu vrtložnost, vidi dalje), ili pri najisturenijem dijelu izlaznog toka.

Neka od najnovijih saznanja o evoluciji tornada mogu se naći u Orf i sur. (2017) zahvaljući najmodernijim super-računalima i naprednoj vizualizaciji. Nedostatak pouzdanih mjerenja je glavni razlog nedovoljnog poznavanja tornadogeneze. Slika 7.3 prikazuje tzv. radarsku dual-dopplersku sintezu horizontalnog polja vjetra (korištena 2 Doppler radara) jednog superćelijskog *Cb*-a što je proizveo i tornado.



Slika 7.3 Dual-dopplerska slika horizontalnog polja vjetra superćelijskog *Cb*-a što je kasnije proizveo i tornado. Prikazana su 3 nivoa. Desne slike prikazuju isto što i lijeve, ali je oduzeta srednja brzina vjetra velike skale na visini od 1.2 km kako bi se naglasilo relativno gibanje zbog same oluje. Na x i y -osi su udaljenosti u km od jednog od 2 korištena radara; max. brzine premašuju 22 m/s.

Prisjetimo se da udari vjetra u jakom tornadu (nastaju u olujama gdje vlažan i topao zrak presreće relativno hladan i suhi zrak pa gibajući se različitim brzinama i smjerovima međudjeluju i stvaraju vrtlog) prelaze 100 m/s, što većina standardnih anemometara ne može izdržati. Mini-tornada su 'domaće' pijavice. One također mogu podizati krovove kuća i prekratati manje objekte (barke, motore, i sl.). Postojanje značajnog CAPE-a, npr. preko 1000 J/kg, perzistentnog Ri_{BULK} između otprilike -15 i -45 (jer je $N^2 < 0$; ako je definiran pomoću CAPE-a u brojniku, onda je pripadni $Ri_{BULK} > 0$ kao što je već bilo spomenuto iza (18)), te dovoljno vlažnosti u atmosferskom graničnom sloju su bitan preduvjet za formiranje superćelijskog *Cb*-a i eventualnu tornadogenezu. Najčešća kratka prednjava tornada je pojava tzv. „wall cloud-a“, tj. zida oblaka nepusredno ispod glavne podnice *Cb*-a. Ovi traju barem 10 min, imaju očitu rotaciju i jasno vidljiva jaka silazna i uzlazna gibanja iz kojih se onda može spustiti tornado. Nerjetko zid oblaka nije vidljiv zbog jakog pljuska i prašine. Prema Linu (2007), superćelijski *Cb* se rijetko pojavljuju izvan intervala $-10 < Ri_{BULK} < -50$, jer je s jedne strane premali CAPE da se razviju jaki vertikalni konvektivni mlazovi, ili pak s druge strane, srednje vertikalno smicanje vjetra je preslabo da balansira i značajno međudjeluje s CAPE-om. Bez satelitskih i radarskih mjerenja s jedne strane, te detaljnih numeričkih simulacija zadovoljavajuće rezolucije i parametrizacije mokrih procesa, s druge strane, nije moguć dalji napredak u proučavanju i praćenju duboke konvekcije.

Dinamika olujnog vremena je posebno poglavlje mezoskalne meteorologije koje dotičemo nekoliko puta u ovom kolegiju. Vjerojatno je da će ovo poglavlje progresivno dobijati sve više na važnosti u znanosti i u ljudskim aktivnostima jer zagrijavajući zrak može sadržavati progresivno više vlažnosti u sebi, nego hladan zrak. Nadolazeće projekcije mikroklimе cijelog Jadrana, Slavonije, itd. neće moći zaobići dinamiku i statistiku pripadnih mezoskalnih oluja. Na DHMZ-u postoje znanstveni projekti u kojima se meteorolozi već godinama bave ovom problematikom nad širim područjem Hrvatske.

8. UVLAČENJE ZRAKA PRI KONVEKCIJI

Znamo da CAPE predstavlja gornju granicu, maksimalnu vrijednost, koja može biti česti zraka na raspolaganju za konvekciju (ukratko rečeno). No, potrebna je i realističnija procjena stvarne energije (po jedinici mase zraka) konvekcije. Za ovakve procjene potrebno je uvažiti i uvlačenje okolnog zraka u podizuću čest za koju smo do sad pretpostavljali nemiješanje i temperaturnu izoliranost. Takvi proračuni su važni za operativne numeričke prognostičke modele poput Aladina, Hirlama, WRF-a, itd.

Ako se promatra pseudo-adijabatički proces, θ_e je relevantna termodinamička veličina:

$$\theta_e \approx \theta \exp\left(\frac{L_c q_s}{C_p T}\right), \quad (1)$$

gdje je θ početna potencijalna temperatura, L_c je latentna toplina kondenzacije, q_s je omjer mješanja u zasićenoj česti i C_p je specifična toplina pri konstantnom tlaku, T je početna temperatura česti.

Pri podizanju česti u stvarnosti ne vrijedi stroga adijabatičnost (to je samo dobra aproksimacija!), odnosno dolazi do interakcije česti i okolnog zraka. Kako okolni zrak sadrži manje vlage nego promatrana vlažna čest, dio kondenzirane vlage unutar konvektivne česti mora ispariti (izvlačenje, 'detrainment'). I zbog toga dolazi do relativnog smanjenja ekvivalentne temperature visinom (obzirom na nemiješajući zrak i pripadni CAPE). To međudjelovanje s okolišom se događa svim varijablama česti.

Pogledajmo neku prikladnu očuvanu varijablu A . Promjenu od A u konvektivnoj uvlačećoj ćeliji dobijemo ako aproksimiramo ćeliju kao stacionarnu vertikalnu struju, tj. poput vertikalnog mlaza. U vremenu δt čest mase m i proizvoljne, do sada, konzervativne varijable oblaka $m A_{cld}$ mijesha se s δm uvučenog zraka koji ima okoliš, $\delta m A_{env}$ količine pripadne varijable. Promjena vrijednosti A u oblaku je δA (konačno stanje = početno stanje + okolišni doprinosi):

$$\text{„Finalno} = \text{Start} + \text{Uvlačenje“}, \text{ tj.} \quad (2)$$

$$(m + \delta m)(A_{cld} + \delta A_{cld}) = m A_{cld} + \delta m A_{env} + \left(\frac{D A_{cld}}{D t}\right)_i m \delta t, \quad (3)$$

gdje zadnji član s desne strane označava promjenu A_{cld} ($= A_{oblak}$) ponora i izvora nevezanim s uvlačenjem (npr. adijabatički i/ili advektivni doprinosi, indeks i). Pomnožimo sve zagrade:

$$m A_{cld} + \delta A_{cld} m + \delta m A_{cld} + \delta m \delta A_{cld} = m A_{cld} + \delta m A_{env} + \left(\frac{D A_{cld}}{D t}\right)_i m \delta t.$$

Prvi članovi na lijevoj i desnoj strani se dokinu međusobno, a zadnji član na lijevoj strani je produkt malih veličina pa se može kao takav zanemariti. Dobiveni izraz dijelimo prvo s δt .

$$\frac{\delta A_{cld}}{\delta t} m + \frac{\delta m}{\delta t} A_{cld} = \frac{\delta m}{\delta t} A_{env} + \left(\frac{D A_{cld}}{D t}\right)_i m$$

Izraz se podijeli s masom m i malo se preuredi:

$$\frac{\delta A_{cld}}{\delta t} = \left(\frac{DA_{cld}}{Dt} \right)_i - \frac{\delta m}{\delta t} \frac{1}{m} (A_{cld} - A_{env}) \quad (4)$$

Neka se u vremenu δt čest podigne za $\delta z = w \delta t$. Stoga se δt može zamijeniti s $\delta z/w$, kako bi se dobio izraz za promijenu A_{cld} u ovisnosti o visini, kod kontinuiranog uvlačenja.

$$\frac{\delta A_{cld}}{\delta z} w = \left(\frac{DA_{cld}}{Dt} \right)_i - \frac{\delta m}{\delta z} \frac{w}{m} (A_{cld} - A_{env})$$

Uvodimo definiciju $\lambda \equiv \frac{d \ln(m/m_0)}{dz}$ koja predstavlja iznos uvlačenja.

$$\frac{dA_{cld}}{dz} w = \left(\frac{DA_{cld}}{Dt} \right)_i - \lambda w (A_{cld} - A_{env}). \quad (5)$$

U slučaju da nema uvlačenja, onda u (5) trivijalno nema 2. člana na desnoj strani i sve se svodi na članove i tumačenja od prije. Obično je 2. član sam po sebi pozitivan pa on smanjuje samu varijablu, tj. umanjuje konzervativnost od A . Ako je npr. $A = \ln(\theta_e)$, točnije $\ln(\theta_e/C)$, gdje je $C = 1K$, moramo biti svjesni činjenice da je θ_e očuvano kad nije prisutno uvlačenje.

Slijede 2 primjera za (5); krenimo od već spomenutoga.

$$\left(\frac{d \ln \theta_e}{dz} \right)_{cld} w = \left(\frac{D(\ln \theta_e)_{cld}}{Dt} \right)_i - \lambda w ((\ln \theta_e)_{cld} - (\ln \theta_e)_{env}),$$

Stoga je, zbog adijabatičkog očuvanja θ_e , 1. član na desnoj strani nula. Podijelimo izraz s w , i iskoristimo definiciju ekvivalentne potencijalne temperature:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d \ln \theta_e}{dz} \right)_{cld} &= -\lambda \left[\ln \left(\theta_e \frac{L_c q_s}{C_p T} \right)_{cld} - \ln \left(\theta_e \frac{L_c q_s}{C_p T} \right)_{env} \right] \\ &= -\lambda \left[\ln \theta_{cld} + \frac{L_c q_{s,cld}}{C_p T_{cld}} - \ln \theta_{env} - \frac{L_c q_{s,env}}{C_p T_{env}} \right] \\ \left(\frac{d \ln \theta_e}{dz} \right)_{cld} &\approx -\lambda \left[\frac{L_c}{C_p T} (q_{s,cld} - q_{s,env}) + \ln(\theta_{cld} / \theta_{env}) \right]. \quad (6) \end{aligned}$$

Može se zaključiti iz (6) da konvektivna čest u kojoj je prisutno uvlačenje ima manje uzgona nego ona u kojoj nema uvlačenja. U (6) obično dominira 1. član (koji smo također pojednostavili na desnoj strani pretpostavljajući srednju temperaturu u nazivniku). Pretpostavi li se hidrostatička ravnoteža i za čest, a ne samo za okoliš, onda se 2. član na desnoj strani od (6) može zapisati kao $\ln(T_{cld} / T_{env})$.

Vratimo se na (5) i uzмимо da je $A_{oblaka} = w$, uz pretpostavku, radi jednostavnosti, da je w okoliša po iznosu puno manja od one za konvektivnu čest:

$$\left(\frac{dw}{dz}\right)_w = \left(\frac{Dw}{Dt}\right)_i - \lambda w(w-0)$$

Prvi član na desnoj strani malo drugačije zapišemo:

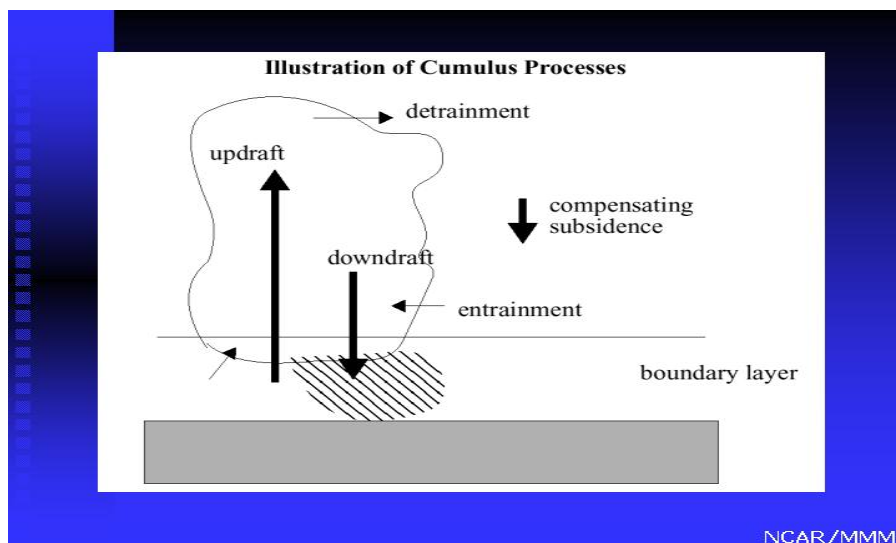
$$\frac{Dw}{Dt} = \frac{Dz}{Dt} \frac{Dw}{Dz} = w \frac{Dw}{Dz} = g \frac{T_{cld} - T_{env}}{T_{env}}$$

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{w^2}{2} \right) = g \frac{T_{cld} - T_{env}}{T_{env}} - \lambda w^2. \quad (7)$$

Ćelije u kojima je prisutno uvlačenje okolnog zraka sporije će ubrzavati svoj razvoj nego one kod kojih nema uvlačenja; to ukazuje na smanjenje uzgona i potezanje koje se javlja prilikom uvlačenja okolnog zraka od strane promatrane česti zraka. Postoje dodatni efekti oko stvarnog procesa uvlačenja a koje nismo uzeli u obzir (otpor zbog lokalnog uvlačenja koji se javlja na prijelazu između okolnog zraka i rastuće, toplije česti; zatim zanemarili smo nehidrostatičke 3D efekte - ovi proizvode nelokalne utjecaje, uočeni su do danas samo u modelima i jedva da se naslućuju u najfinijim mjerenjima). Otpor pri razvoju termala može biti i valne (npr. 3D nagnuti ili zakrivljeni Kelvin-Helmholtzovi valići, KHV) i turbulentne prirode; preraspodjela (redistribucija) tlaka također vjerojatno igra značajnu ulogu u uvlačenju zraka u termale.

Naravno da smo u (6) i (7) na najgrublji mogući način parametrizirali utjecaj uvlačenja: tako da je to konstanta, ili u najboljem slučaju sporo-varirajući parametar (npr. podsjetimo se osnovne ideje WKB metode i tretiranja varijabilnog medija). Učinili smo to iz više razloga, jedan je matematička jednostavnost i transparentnost samog problema. Drugi je dublji, kompleksniji i kontroverzniji i ovdje ga otvaramo na površan način, kao što npr. santa leda viri iz mora. Uvlačenje kao prvo, nema standardnu dimenziju, pojavljuje se u različitim okolnostima u fizici; to tek donekle ukazuje na nerješenu prirodu ovog tranzijentnog procesa. Na primjer, uvlačenje se pojavljuje u parametrizaciji procesa oko inverzije na vrhu graničnog sloja i tada je obično predstavljeno kao razlika vertikalnih brzina inverzije i karakterističnih česti uz inverziju. U procesu miješanja između stratificiranog fluida i primjese, nerjetko se uvlačenje parametrizira kao $E \sim R_i^r$, gdje je 'entrainment', E , proporcionalan nekoj negativnoj potenciji gradijentnog Richardsonovog broja, R_i , $-2 < r < -0.5$. U ovakvom slučaju E predstavlja apsolutni omjer između ulazne (uvlaćeće ili izvlaćeće) struje okoliša što djeluje ugl. okomito na osnovnu karakterističnu brzinu mlaza.

U laboratoriju je jako teško postići uvjete kao i u atmosferi; to značajno otežava istraživanje uvlačenja zraka u atmosferske mlazove (Princevac i sur. 2005). Ovi autori su pokazali da je uvlačenje u geofizičkim fluidima bitno drugačije u prirodi nego u laboratoriji. Oni predlažu, na osnovi svojih mjerenja u SAD-u, za omjer ulaznih brzina E u katabatičkom strujanju relativno hladnog zraka niz nagnutu podlogu (vidi kasnije) da bude $E \approx 0.05 R_i^{-3/4}$, gdje je R_i opet gradijentni Richardsonov broj. To je za oko red veličine jače uvlačenje nego u laboratoriji; ovaj kompleksan geofizički proces objedinjuje nekoliko efekata, od trenja zbog KHV pa do njihovih sljedbenika pri jačoj stabilnosti (tj. većem R_i broju), tzv. Hölblöe-tipa valova i pripadne nestabilnosti. Ovi drugi (također relativno kratki) valovi i njihova nestabilnost, donekle slična KHV nestabilnosti, tj. KHI, je puno manje spektakularna i intenzivna od nestabilnosti KHV, slabije i rijeđe u vremenu miješa fluid(e). Ipak, sporadično u vremenu i prostoru, Hölblöe nestabilnost bi mogla biti izvor jače turbulencije i miješanja u stratificiranom zraku. Ilustracija uvlačenja, zajedno s još nekoliko važnih procesa u donjoj troposferi, je prikazana na Slici 8.1.



Slika 8.1 Skica važnih procesa u donjoj troposferi vezanih uz uvlačenje zraka i međudjelovanja vlažnog zraka i podloge (Izvor: NCAR/MMM internet).

Ovaj kompleksan proces, '*entrainment*' ili uvlačenje (odnosno '*detrainment*' ili izvlačenje), ovisi o nizu 'potprocesa', o detaljima koji nisu mjerljivi u standardnoj meteorološkoj praksi (npr. kao što uobičajeno nisu mjerljivi KHV). Pri uvlačenju radi se obično o prijelazima između laminarnih i turbulentnih 3D gibanja, što dodatno otežava razumijevanje i modeliranje tog procesa. Stoga smo se i bili pozvali na kratke valove u kvalitativnoj diskusiji o pojačanom miješanju između okolišnog i u(z)laznog zraka. Vjerojatno ovaj proces uvlačenja zraka još nije do kraja shvaćen i objašnjen jer se radi o prijelazu između determinističkog i stohastičkog procesa za koji ne postoji solidna i efikasna matematička podloga kao ni fundamentalno fizikalno tumačenje.

Vratimo se konvekciji. Neke česti ipak uspiju duboko konvektirati kroz cijelu troposferu, pa čak i probiti tropopauzu u krajnjem slučaju, a uz minimalno uvlačenje okolnog zraka i vlastito 'razvodnjavanje'. To znači da na njihov razvoj uvlačenje nije značajno djelovalo. Stoga indirektno zaključujemo da je uvlačenje sporadičan 3D turbulentan proces. Vjerojatno granični sloj igra u tome suptilnu i još nerazjašnjenu ulogu; prvenstveno moraju u tome biti važni turbulentni fluksevi latentne topline. Konačno, nije isključena mogućnost da međuigra mikrofizike s raspodjelom čestica kondenzacije s jedne strane, te mezo- i mikroskalne dinamike i pripadnih nestabilnosti s druge strane, odabiru termale koji će stvoriti dominantne ćelije duboke konvekcije nad nekim terenom. Nastavljamo s dubokom konvekcijom, dok ćemo se tzv. plitkoj konvekciji posvetiti u poglavljima o graničnim slojevima.

9. KONVEKTIVNE OLUJE I VRTLOŽNOST U SUPERĆELIJAMA

To su oluje koje su nastale pod utjecajem intenzivne duboke mokre konvekcije. Ovdje proučavamo razvoj intenzivne vrtložnosti u pripadnim konvektivnim 'super-oblacima'. Podsjetimo se da postoje tri primarna tipa konvektivnih oblačnih : jedinična , multi-, te superćelija. Važne veličine koja govore o jačini konvekcije su CAPE i vertikalna brzina te vertikalno smicanje osnovnog vjetra.

U jediničnoj i multićeliji se javlja i silazno gibanje, relativno blizu uzlaznom mlazu, nakon nekog vremena, inducirano oborinom, koje nakuplja hladni zrak blizu tla. Razvitak novih se javlja pri udarima vjetra kad hladan zrak diže ili gura nestabilan zrak nakupljen ispod i ispred oblaka pri tlu. Pri horizontalnoj brzini većoj od 20 m/s ispod 4 km visine, što znači jako vertikalno smicanje vjetra, javlja se konstruktivno mješanje konvektivnih (dakle i postojanje razlika u vertikalnoj brzini), što će produljiti razvoj olujnog sustava čak i do nekoliko sati, jer u ovom slučaju silazno gibanje je podalje od uzlaznog gibanja te ga ne ometa. To će rezultirati razdjeljivanjem konvektivnog sustava u dvije olujne ćelije (između pada oborina), lijevo i desno obzirom na srednji vjetar u troposferi. Ako je smicanje vjetra visinom istog smjera, tj. nema zakretanja vjetra, onda su razdjeljeni dijelovi superćelije u idealiziranim uvjetima isti. No ipak, u prosjeku na sjevernoj hemisferi prevladava anticiklonalno smicanje vjetra kroz slabo-stratificiranu donju troposferu (poput Ekmanovog sloja, vidi kasnije); stoga, obično lijeva brzo odumire (jer joj nije naklonjeno prosječno vektorsko smicanje srednjeg vjetra visinom), dok se u desnoj ćeliji otpočinje, odnosno nastavlja razvijati snažna rotacija i eventualno čak mezoskalna cirkulacija vjetra (mezo-ciklona). Takva superćelije, povezana s vlastitom mezo-ciklonom, će proizvesti jake oborine, tuču te možda pijavicu ili čak tornado. Nakupine multi i superćelije često su organizirane. Glavna forma organiziranja jake duboke konvekcije je mezoskalni konvektivni sustav; MCS može biti linearnog ili kružnog oblika, obično se radi o nakupini velikih olujnih oblaka. U MCS-e spadaju mezoskalni konvektivni kompleksi (MCC) i tzv. LOKS-ovi (*squall lines*) u izvan-tropskim širinama, te tropske ciklone (uglavnom nemaju fronte i posjeduju toplu jezgru) i konvektivne oblačne nakupine u tropima. MCS je veći od pojedine konvektivne ćelije, ali je najčešće manji od Rossbyjevog radijusa deformacije; to znači da su im horizontalne dimenzije reda veličine 100 km, traju barem 3-4 sata, dok pripadna (prateća) stratiformna naoblaka može postojati i nekoliko dana. Zbog svojih nemalih dimenzija i intenziteta (prijenos energije, topline i vlažnosti), MCS-ovi utječu i na opću cirkulaciju atmosfere. Sastoje se od običnih (jednoćelijskih), multićelijskih i/ili čak superćelijskih oblaka.

Nalet hladnog zraka što ponekad osjetimo u vrućem ljetnom danu može nam biti zadnje upozorenje prije nego stigne olujno nevrijeme s jakom oborinom. Taj zrak je ohlađen isparavanjem kišnih kapi i obično se spušta kroz unutrašnjost oluje prije no što se raširi naokolo nad podlogom. Općenito, MCS imaju dvije glavne podstrukture strujanja: topao i vlažan mlaz zraka prema gore što „hrani“ sustav i hladni, relativno suhi mlaz prema dolje što prazni sustav. Ovaj hladni dio silaznog strujanja može započeti nove olujne oblake u uvjetno nestabilnom vlažnom zraku i tako pokrenuti 'lančanu' reakciju.

Intenzivni LOKS-ovi (*squall lines*) mogu putovati različitim smjerovima od individualnih oluja, žive po nekoliko dana (*squall lines* se obično nalaze u toplom sektoru, nekoliko stotina km ispred hladne fronte) i vjerojatno su najbrže (skoro linearne) forme MCS-a. Kao i u ostalim MCS-ima, pojedine konvektivne ćelije žive (puno) kraće od sustava, tj. LOKS-a. Ove je pak nerjetko teško razlikovati od intenzivnih kišnih pruga (*rainbands*). Druga vrlo organizirana vrsta MCS-a je spomenuti MCC; prepoznaju se u satelitskim snimkama kao veliki, gotovo kružni dugotrajni hladni oblačni štit. Mogu nastati i od prethodnih LOKS-a. Traju u prosjeku 15-ak sati, vrhovi pripadnih oblaka imaju temperaturu ispod -52°C , dok im ukupna površina može prijeći čak 200 000 km^2 , to znači da im je pripadni Rossbyjev broj, $R_o \sim 1$. Nerjetko se javljaju ispred sinoptičke

kratkovalne doline u srednjoj i gornjoj troposferi, karakterizirane značajnim vertikalnim brzinama; primarno forsiranje im dolazi od tople advekcije u donjoj troposferi. U razvijenoj formi MCC-a tipičan im je topli vertikalni mlaz okružen mezoskalnim konvektivnim vrtlogom, hladna anticiklonalna jezgra blizu tropopauze i hladno, obično nevremensko prizemno područje mezoskalnog visokog tlaka (*mesohigh*) zbog izlaznog silaznog strujanja iz oblaka. Primijetimo da je tzv. *mesohigh* povezan s ružnim vremenom, formiran je rashlađivanjem zraka zbog padajuće isparavajuće jake oborine i/ili tuče; pri tlu nerjetko proizvodi vlastiti 'gust front' (mini-fronta jakog udara relativno hladnog vjetra). Većina MCC-a se javljaju u zavjetrini velikih planina, nad tlom gdje su česte niske mlazne struje koje mogu dovesti zrak relativno velikih vrijednosti θ_e , te gdje je CAPE dovoljno velik obzirom na okolna područja.

Duboka (smatra se i mokra, ako se ništa drugo ne spomene) konvekcija u principu dovodi do intenzivne oborine. Isparavanje oborine što ispada iz konvektivnih oblaka proizvodi hladni silazni zračni mlaz (engl. *cold downdraft*), tj. silaznu turbulentnu struju. Taj mlaz rezultira u relativno hladnom pridnenom širećem, kvazi-radijalnom strujanju (*outflow*), koji putuje nad podlogom kao relativno gušća i hladnija struja (*density current*). Kad ta struja naiđe na relativno topliji i vjerojatno vlažniji te možda i uvjetno-nestabilan zrak u atmosferskom graničnom sloju, hladna struja se podvlači pod topliji okolni zrak i ovaj se počinje uzdizati. To onda često dovodi do nove konvekcije i novog oblaka. Pripadni oblačni sustavi, npr. mezoskalni konvektivni sustavi (MCS), mogu putovati preko nekoliko stotina kilometara i pritom dovodeći do značajnog uzdizanja zraka. Mehanizmi stvaranja MCS-a, i posebice LOKS-ova (*squall lines*), mogu biti povezani s uzgonskim ili uzgonsko-inercijskim valovima te njihovim međudjelovanjem s hladnim zrakom u mokroj atmosferi. Valovi pri tome proizvode područja konvergencije i divergencije u donjoj troposferi, što dovodi do koncentrirane konvekcije u konvergentnim područjima i pojačavajući koherentnost pokretačkog mehanizma organizirane konvekcije te samog vala. Konvekcija daje energiju, a val daje karakterističnu selekciju dominantne skale i organizacije konvekcije. Time se proizvodi samoodržavajući konvektivni sustav, poznat kao tzv. valni-CISK sustav (*'Convective Instability of the Second Kind'*, CISK). Ipak, ima puno MCS-a koji nemaju karakteristike CISK-a (npr. mnogi MCS-i se ne gibaju brzinom spomenutih valova).

Razvoj vrtložnosti u superćelijama

Superćelije su od posebnog značaja jer imaju tendenciju razvoja rotirajućih mezociklona u početno (vertikalno) nerotirajućem zraku. One bitno doprinose vodnoj bilanci mnogih krajeva u svijetu i stoga je njihovo proučavanje progresivno sve važnije u znanosti, meteorološkim službama kao i u mnogobrojnom agencijama za primjene meteoroloških i hidroloških rezultata. Može se pokazati da rotacija Zemlje nije relevantna u razvoju rotacije u superćelijama (trajanje konvektivnog procesa!). Iako bi za detaljno razumjevanje procesa koji vodi razvoju superćelije trebalo uzeti u račun i promjenu u stratifikaciji (tj. gustoću i temperaturu po vertikali) u atmosferi u daljnim razmatranjima se to zanemaruje, odnosno dovoljno je koristiti Boussinesqovu aproksimaciju da objasnimo kvalitativno bit ove rotacije. Jednadžba gibanja i kontinuiteta mogu se izraziti kao:

$$\frac{D\vec{U}}{Dt} = \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla})\vec{U} = -\frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla}p + b\vec{k} + \nu \nabla^2 \vec{U} \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{U} = 0 \quad (2)$$

gdje su $\vec{U} = \vec{U}_0 + \vec{k}w$, ili kasnije još jednostavnije samo, $= \vec{U} + \vec{k}w'$, trodimenzijska brzina strujanja, ρ_0 gustoća, p poremećaj tlaka, $b \equiv -g\rho/\rho_0$ uzgon, ρ je poremećaj gustoće i zadnji član

je utjecaj molekularne viskoznosti, tj. molekularna difuzija polja brzine (najslabiji član koji se najčešće zanemaruje).

Ako raspišemo drugi član brzine u jednadžbi (1) kao:

$$(\vec{U} \cdot \vec{\nabla})\vec{U} = \vec{\nabla} \left(\frac{\vec{U} \cdot \vec{U}}{2} \right) - \vec{U} \times (\vec{\nabla} \times \vec{U}),$$

gdje diferencijalni prostorni operator u 2. članu na desnoj strani djeluje samo na brzinu desno od sebe (tj. ne i na brzinu neposredno ispred zagrade); nadalje, znamo: $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{U}$, pa dobivamo:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \left(\frac{p}{\rho_0} + \frac{\vec{U} \cdot \vec{U}}{2} \right) + \vec{U} \times \vec{\omega} + b\vec{k} + \nu \nabla^2 \vec{U} \quad (3)$$

Primjenom operatora $\vec{\nabla} \times$ na jednadžbu (3), prvi član na desnoj strani iščezava te dobivamo 3D jednadžbu za 3D vrtložnost:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = \vec{\nabla} \times (\vec{U} \times \vec{\omega}) + \vec{\nabla} \times (b\vec{k}) + \nu \nabla^2 \vec{\omega}. \quad (4a)$$

Uz preuređenje, koristeći $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{c} \cdot \vec{a}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$, te činjenicu da $\vec{\nabla}$, tj. \vec{a} , kao diferencijalni vektorski operator, djeluje u ovom slučaju na oba vektora iza sebe u (4), jer je potrebno izračunati $\vec{\nabla} \times (\vec{U} \times \vec{\omega})$, dobijamo:

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{U} \cdot \vec{\nabla})\vec{\omega} = (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla})\vec{U} + \vec{\nabla} \times (b\vec{k}) + \nu \nabla^2 \vec{\omega}. \quad (4b)$$

Iz (4) ćemo uskoro zaključiti da je osnovni uzrok razvoja vrtložnosti 3D zakretanje, savijanje i naginjanje postojeće vrtložnosti ('tilting'); rotirajući se elementi savijaju i rastežu (za česti koje čine 3D vrtlog veća je vjerojatnost da će se međusobno udaljavati nego približavati). Prvi član na desnoj strani je 'vrtložna advekcija' polja strujanja, s bitno 3D strukturom ('tiltanje', zakretanje). Drugi član na desnoj strani predstavlja rotaciju uzgona. Budući da je uzgon neizotropan, tj. djeluje samo po vertikali, i polje strujanja i vrtložnosti je također neizotropno u atmosferi i moru. Zadnji član u (4) je viskozna difuzija 3D vrtložnosti.

Predstavljajući $\zeta = \vec{k} \cdot \vec{\omega}$ kao vertikalnu komponentu vrtložnosti i množeći vertikalnim jediničnim vektorom \vec{k} jednadžbu (4), bez efekta viskoznosti dobivamo jednadžbu tendencije ζ (u nerotirajućem sustavu, tj. uz pretp. $f \rightarrow 0, \nu \rightarrow 0$):

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} \approx \vec{k} \cdot \vec{\nabla} \times (\vec{U} \times \vec{\omega}) \quad (5a)$$

Treba primjetiti da uzgon djeluje samo na horizontalnu komponentu vrtložnosti te da se ne pojavljuje u (5a). Napomenimo (a izvan osnovne teme ove lekcije) da je (5) donekle slično izrazu za rotaciju u modelu plitkog fluida gdje se uzgon trivijalno ne pojavljuje, kao što se ne pojavljuje u (5). Raspišujemo (5a) koristeći pravilo vektorske algebre za produkt na desnoj strani (tj. vraćamo se množenju vertikalnim jediničnim vektorom jedn. (4b)):

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \bar{U} \cdot \nabla \zeta = \bar{\omega} \cdot \nabla w + \nu \nabla^2 \zeta. \quad (5b)$$

Prijeđimo na primjer i promatrajmo strujanje koje se sastoji od konvektivnog uzlaznog gibanja, tj. mlaza toplog zraka (promjer ~ 1 do 10 km), ugnježđenog (uronjenog) u osnovno zapadno strujanje koje ovisi samo o visini z . Pretpostavimo da se vrtložnost i brzina mogu prikazati kao:

$$\bar{\omega} = \bar{j} d\bar{u} / dz + \bar{\omega}'(x, y, z, t), \quad \bar{U} = \bar{i} \bar{u}(z) + \bar{U}'(x, y, z, t).$$

Linearizacijom (5):

$$\bar{k} \cdot \bar{\nabla} \times (\bar{U} \times \bar{\omega}) = -\bar{k} \cdot \bar{\nabla} \times (\bar{i} w' d\bar{u} / dz + \bar{j} \bar{u} \zeta')$$

dobija se jednadžba za lineariziranu tendenciju vrtložnosti (koja se mogla naslutiti iz (5b)):

$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t} = -\bar{u} \frac{\partial \zeta'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial y} \frac{d\bar{u}}{dz} + \nu \nabla^2 \zeta'. \quad (6a)$$

Prvi član na desnoj strani od (6a) predstavlja advekciju već postojeće vrtložnosti, dok drugi, 'tiltajući' član predstavlja međudjelovanje diferencijalnog vertikalnog gibanja, $\partial w' / \partial y$, sa smicanjem osnovne struje. Primijetimo da drugi faktor u drugom članu na desnoj strani od (6a), $d\bar{u} / dz$, čija vrijednost mora biti velika da bi uopće počelo stvaranje superćelije, je istovremeno i osnovna komponenta neporemećene horizontalne vrtložnosti. Stoga, ovaj drugi član na desnoj strani od (6a) efektivno zakreće osnovnu horizontalnu vrtložnost u vertikalnu. Kako je $d\bar{u} / dz$ član gotovo uvijek pozitivan u pripadnim mezoskalskim situacijama s dubokom konvekcijom, vrtložnost zbog 'tilting' člana će uvijek biti pozitivna prema jugu jezgre (na desno) uzlaznog gibanja, a negativna prema sjeveru jezgre (na lijevo od uzlaznog mlaza). Odnosno kao rezultat se javlja vrtlog u smjeru obrnutom od kazaljke na satu, tj. s ciklonalnom rotacijom prema jugu od mlaza (na desno), a sa anticiklonalnom rotacijom prema sjeveru od glavnog (početnog) uzlaznog gibanja. Dimenzije tih novih vrtloga lijevo i desno (na jug i sjever, obzirom da smo uzeli da je osnovno strujanje zapadno) su ~ 1 do 10-ak km (Slika 9.1a). Ako osnovni odnosno ambijentni vjetar ne mijenja smjer, obje su novonastale konvektivne ćelije jednako favorizirane za dalji razvoj. Zadnji član u (6a) je zanemariv u dinamici superćelije.

Jedan od glavnih zaključaka iz (6a) je da se vertikalna komponenta vrtložnosti može proizvesti i u početno horizontalno nerotirajućem zraku (tj. bez vertikalne komponente rotacije) ako postoji: 1) značajno vertikalno smicanje osnovnog vjetra (horizontalna komponenta vrtložnosti) i 2) značajne horizontalne varijacije vertikalne brzine (npr. vertikalni mlazovi, tj. engl. 'plumes'). Njihova 3D kombinacija tj. međudjelovanje, ovdje 'tilting', može proizvesti značajnu mezoskalsku vertikalnu vrtložnost. U slučaju 2D srednjeg vjetra, (6a) dobija još 2 člana na desnoj strani, tj.

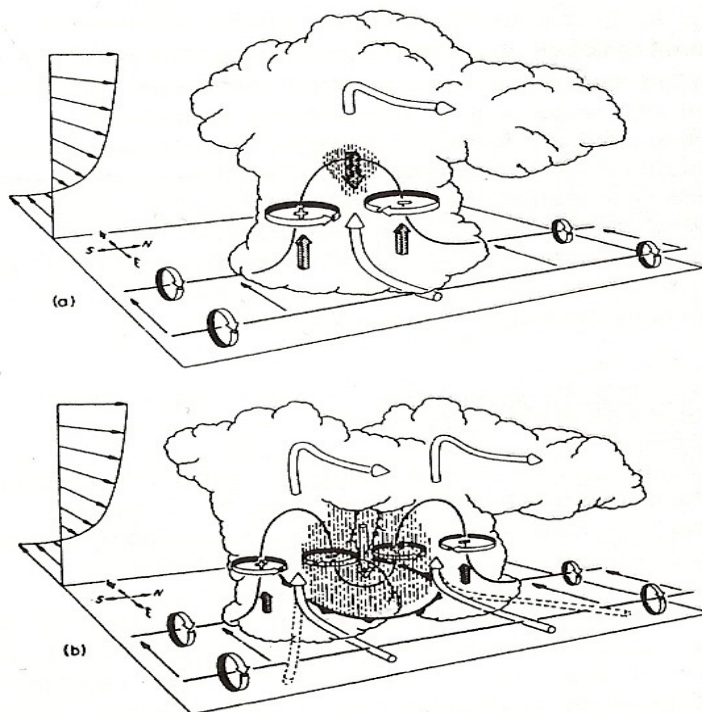
$$\frac{\partial \zeta'}{\partial t} = -(\bar{u} \frac{\partial \zeta'}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \zeta'}{\partial y}) + \frac{\partial w'}{\partial y} \frac{d\bar{u}}{dz} - \frac{\partial w'}{\partial x} \frac{d\bar{v}}{dz} + \nu \nabla^2 \zeta', \quad (6b)$$

čija su tumačenja analogna prethodnima (novi advektivni i novi zakretajući član).

S vremenom se zbog kondenzacije u gornjem dijelu osnovnog mlaza i pripadne oborine javlja negativan uzgon koji na gornjem nivou na mjestu uzlaznog gibanja stvara silazno gibanje pa se oluja se razdvaja (Slika 9.1b). Tada olujni oblak već postoji nekoliko sati. Razvoj joj je sporiji od jedinične ćelije, dulje traje i pomaže joj jako osnovno smicanje vjetra tako da oborina iz

osnovnog mlaza ne uspije zagušiti glavno uzlazno gibanje (jer ga smicanje srednjeg vjetra uspije izmaknuti od oborine). Superćelija 'preživi' negativni oborinski mlaz prvenstveno zbog jakog vertikalnog smicanja vjetra, počinju se javljati pozitivni povratni mehanizmi koji dalje pojačavaju razvoj (npr. oslobađanje latentne topline u srednjoj troposferi, prizemna fronta udara vjetra, tzv. 'gust front' koja gura i podiže vlažni i topli zrak pred sobom, itd.) tako da ovaj oblačni superorganizam nastavlja svoj razvoj još nekoliko sati. Prizemni 'gust front' je nastao spuštanjem hladnog zraka (ohlade prvenstveno isparavanjem ispadajuće oborine) i razlijevanjem po podlozi ispod superćelije (Sl. 9.1b). Tu je glavni izvor regeneracije oluje i kontinuiranog stvaranja uvjetno nove ćelije. S druge strane, Cb disipira kad se glavna silazna struja odsiječe od glavne uzlazne struje koja onda više nema dotok toplog i vlažnog zraka. Nakovanj i ostali gornji dijelovi oblaka mogu još postojati neko vrijeme.

Množeći (3) s 3D vrtložnosti a (4b) s brzinom i zbrajajući takve dvije jednadžbe dolazi se do prognostičkog izraza za $\omega_i U_i$, tj. skalarnog produkta vrtložnosti i brzine, koji je jedino moguće razviti u 3D (i višedimenzijском) prostoru. To je spiralnost ili zavojitost (engl. 'helicity') strujanja i igra ulogu u npr. 3D nelinearnoj dinamici strujanja poput one u tornadogenezi te drugim koherentnim strukturama (npr. dimni kolotovi pri uživanju cigarete, indijanski dimni signali, itd.). Postoje indikacije da područja strujanja s povećanom tj. značajnom zavojitošću imaju zanemarivu disipaciju i obrnuto. To je u skladu s već rečenim da zavojitost dobro korespondira koherentnim strukturama (npr. kvazi-horizontalnim mezoskalnim vrtložima), koje pak mogu imati tek relativno malu disipaciju da bi uopće postojale. U praksi se primjenjuje nešto jednostavnija forma za računanje zavojitosti, tzv. integralna zavojitost (spiralnost) okoliša obzirom na oluju.



Slika 9.1 (a) Ilustracija početnog razvoja superćelije; osnovni vjetar i strane svijeta su prikazane lijevo, masne kružne strelice prikazuju vrtložnost, otvorene savijene strelice predstavljaju ulazeći (dolje) i izlazeći zrak (gore) - sve u sustavu gibanja oblaka, četvrtaste strelice prikazuju uzlazno gibanje, osjenčano područje sa silaznom strelicom predstavlja početak oborine, a tanke prizemne strelice su nadolazeći zrak. (b) Stanje oblačnog sustava u kojem je već došlo do razdvajanja; fronta udara vjetra ('gust front') je skicirana ispod glavne ćelije gdje je počelo razdvajanje superćelije. Sustav kratko nastavlja kao dvija Cb-a (prema Holtonu, 1992 i Klempu 1987).

Raspodjela tlaka u superćeliji

Da bismo razumjeli stvaranje uzlaznog gibanja u konvektivnim vrtlozima, proučavamo polje perturbacije tlaka; ovaj se proces javlja više sati nakon početnog vertikalnog gibanja u mlazu toplog zraka. Dakle, ovo što slijedi odgovara dinamici tlaka Slike 9.1, nakon što se razvila rotacija u superćeliji. Dijagnostička jednadžba za poremećaj tlaka dobiva se primjenom operatora ($\vec{\nabla} \cdot$) na (3) jer operator laplasijena i divergencije komutiraju pa zadnji član iz (3) otpada:

$$\nabla^2 \left(\frac{p}{\rho_0} \right) = -\nabla^2 \left(\frac{\vec{U} \cdot \vec{U}}{2} \right) + \vec{\nabla} \cdot (\vec{U} \times \vec{\omega}) + \frac{\partial b}{\partial z}. \quad (7)$$

Prva dva člana na desnoj strani od (7) predstavljaju dinamičko forsiranje dok posljednji član predstavlja uzgonsko forsiranje. Numerički modeli i mjerenja sugeriraju da dinamički forsirane perturbacije tlaka, prvi i drugi član na desnoj strani od (7), mogu uzrokovati značajna vertikalna ubrzanja (nehidrostatski efekt pumpe) koja su donekle kompenzirana zadnjim (uzgonskim) članom.

Za kvalitativno računanje dinamičkog doprinosa poremećaju sile gradijenta tlaka, bilo u lijevom ili desnom vrtlogu na Sl. 9.1, koriste se cilindrične koordinate (r, λ, z) ; nadalje, pretpostavljamo da je azimutalna brzina v_λ u prvoj aproksimaciji neovisna o azimutu λ , radi jednostavnosti. U ovakvom sustavu, uz spomenuta pojednostavljenja, relativna horizontalna brzina i vrtložnost postaju:

$$\vec{U} \approx \vec{j}_\lambda v_\lambda, \quad \vec{\omega} = \vec{k} \zeta \approx \frac{\vec{k}}{r} \partial(rv_\lambda) / \partial r,$$

gdje je \vec{j}_λ jedinični vektor u azimutalnom smjeru (mali indeks ' λ '), r je udaljenost od osi vrtloga te, $v_\lambda \neq v_\lambda(\lambda)$ i $\vec{U} \approx (u_r \approx 0, v_\lambda, w)$. Uzme li se da je \vec{i}_r jedinični vektor u radijalnom smjeru (mali indeks ' r '), onda imamo:

$$\vec{U} \times \vec{\omega} \approx \vec{i}_r \frac{v_\lambda}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_\lambda).$$

Ako pretpostavimo da je vertikalna skala mnogo (ili bar djelomice!) veća od radijalne, laplasijan u cilindričnim koordinatama može biti aproksimiran kao:

$$\nabla^2 \approx \nabla_{hor}^2 \approx \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right),$$

gdje je zanemaren $|\partial_{zz}^2|$ obzirom na $|\partial_{rr}^2|$.

Na osnovi dosadašnjih pretpostavki također u ovom slučaju vrijedi $\vec{\nabla} \approx \vec{\nabla}_{hor} \approx \frac{\vec{i}_r}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r(\dots))$. Sada možemo u (7) dinamičku komponentu perturbacije tlaka u mlazovima kvazi-vertikalnih vrtloga aproksimirati (označeno kao: p_{dyn}) kao:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r}{\rho_0} \frac{\partial p_{dyn}}{\partial r} \right) \approx -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial (v_\lambda^2 / 2)}{\partial r} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[v_\lambda \frac{\partial (rv_\lambda)}{\partial r} \right] = \frac{1}{r} \frac{\partial v_\lambda^2}{\partial r}. \quad (8)$$

Integrirajući (8) radialno po r dobivamo jednadžbu približne ciklostrofičke ravnoteže:

$$\rho_0^{-1} \partial p_{dyn} / \partial r \approx v_\lambda^2 / r. \quad (9)$$

Prepojednostavljajući problem, zamišljajući da vertikalno postavljeni vrtlog mlaza superćelije rotira, u nultoj aproksimaciji, poput krutog tijela kružnom kutnom brzinom Ω , onda je $v_\lambda \approx \Omega r$, pa (9) integriranjem vodi do: $p_{total} \approx p_0 + \rho_0 \Omega^2 r^2 / 2$, odakle je očito da je minimalni tlak u centru vrtložnog mlaza, neovisno o smjeru rotacije. Ovaj slučaj se može poopćeniti na klasu kutnih brzina $v_\lambda = a_0 r^p + a_1 r^{p+1}$, gdje je $0 < p \leq 1$, te a_0 i a_1 dimenzijske konstante. Ovime smo kvalitativno opisali dinamičke doprinose tlaku u (7). Istovremeno, uzgonski član u (7), $\partial b / \partial z$, najčešće kompenzira spomenuti minimum tlaka. Iz (9) vidimo da u središtu vrtloga postoji minimum tlaka neovisno o tome da li je rotacija ciklonalna ili anticiklonalna (to nije neobično za mezoskalne procese). Jaka rotacija u srednjoj troposferi inducirana vrtložnom strujom mlaza, koja se zakreće i rasteže, stvara efekt centrifugalne pumpe. (Između ostalog i zbog kontinuiteta, brzina v_λ u centru $r \rightarrow 0$ mora isto biti nula.) To, nadalje, stvara doprinos uzlaznim strujama (tj. kroz vertikalnu komponentu sile gradijenta tlaka). Tako dolazi do akceleracije usmjerene prema gore. Silazna gibanja dijele uzlazna gibanja na dvije olujne ćelije, te se tako stvaraju dva nova centra jake konvekcije, koji se počinju gibati lijevo i desno obzirom na početnu oluju. To bi slijedilo nakon Slike 1.b.

‘Tilting i stretching’, tj. 3D zakretanje i umatanje početno horizontalne vrtložnosti povezane s vertikalnim smicanjem osnovnog vjetra može dovesti do rotirajućih mezoskalnih superćelija. No to ne znači da se tako mogu proizvesti velike vrtložnosti koje možemo promatrati u tornadima koji se mogu pojaviti uz superćelije. Numerički modeli sugeriraju da se u tom slučaju javlja *‘tilting i stretching’* jake horizontalne vrtložnosti. Ona je rezultat horizontalnog gradijenta u uzgonu što se javlja blizu tla uzduž linije udara vjetra. U tom području se negativno-uzgonske vanjske struje, nastale konvektivnim silaznim gibanjem zbog isparavanja ohlađenog zraka, mješaju s toplim vlažnim, uvjetno nestabilnim zrakom graničnog sloja. Dakle, koncentracija horizontalne vrtložnosti iza pruge udara vjetra (*‘gust front’*) stvara jaki rotor iza, približno paralelno s, mini-frontom (prugom) udara vjetra. Tornadogeneza se javlja zbog izuzetno jakog rastezanja i savijanja (*‘tilting i stretching’*) početno horizontalne, a onda novonastale vertikalne vrtložnosti.

Tornadogeneza, zakretanje vrtložnosti i pojednostavljena zavojitost strujanja. Pored velikog CAPE-a i jakog smicanja srednjeg vjetra po visini, za stvaranje super-Cb oblaka i eventualnog formiranja pijavica (malih tornada), ili čak tornada, postoje dodatni važni parametri za kratkoročnu prognozu tih ekstremnih pojava. Jedan od tih dodatnih parametara je pojednostavljena verzija zavojitosti strujanja (eng. *helicity*) što je detaljno obrađeno u Pogl. 8.2 i govori o 3D povezanosti vjetra i vrtložnosti što ne postoji u 2D strujanju jer se radi o skalarnom produktu brzine i rotacije, tj. $h = u_i \omega_i$. U pojednostavljenoj, vertikalno integriranoj formi, kakva se ponekad koristi u prognozi nevremena to je:

$$H = \int V_h \omega_h dz \rightarrow \int (U_h - C_h) \omega_h dz,$$

gdje je vertikalno integriran skalarni produkt srednjeg vjetra i horizontalne vrtložnosti kroz donji dio troposfere, npr. 2-3 km; nadalje, dobro je oduzeti od srednjeg vjetra U_h srednju brzinu Cb-a u

odnosu na tlo, C_h , pa tako dobijemo V_h u prethodnom integralu, lijevo. Očito, $H > 0$ ako vjetar zaokreće visinom u desno, i obrnuto, $H < 0$ ako srednji vjetar zaokreće u lijevo po visini. Ovakav H , ako prijeđe $\sim 200 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$, ima velike šanse da se stvori super-Cb, a ako prijeđe takve vrijednosti za $\sim 50 \%$ i više, to onda često dovodi do jake tornadogeneze. Naime, to je mjera potencijala rotacije uzlaznog mlaza zraka u olujnom oblaku koji je direktno povezan s vrtložnošću niz srednji vjetar što ulazi u oluju.

Za uobičajeno smicanje zraka u donjoj troposferi sjeverne izvantropske hemisfere, opisano anti-ciklonalnim zakretanjem srednjeg vjetra visinom, atmosfera preferira desnu ćeliju, dok se lijevoj ćeliji nameće nefavorizirano smicanje. Konačan rezultat je u prosjeku takav da desna preuzima ulogu 'majke' superćelije, a lijeva (uvjetno sjeverna, u našem koordinatnom sustavu) odumire u roku od nekoliko sati. Nađe li superćelija na povoljne izvore vlažnosti i topline, a i dalje je u povoljnom sinoptičkom polju (jako smicanje, uvjetna nestabilnost zraka), ona može opstati proizvodeći stotinjak mm oborine po kvadratnom metru u roku od \sim jednog dana. Orografija bitno komplicira ovu sliku razvoja duboke konvekcije.

Jedan od brojnih primjera organizirane duboke konvekcije nad našim područjem prikazan je u radu Belušića i sur. (2007a) koji se nastavlja na radove domaćih oceanografa proučavajući povremene poplave na Jadranu. U spomenutom radu se istražuje višeskalno atmosfersko međudjelovanje, posebice duboke mokre konvekcije i uzgonskih valova, što se ponekad mogu tako organizirati da formiraju prije spomenute višednevne mezoskalne konvektivne sustave ('*Mesoscale Convective Systems*', MCS). Takvi sustavi mogu proizvesti nekoliko stotina milimetara oborine, nerjetko s tučom tijekom 2-3 dana. Tipični MCS se giba obično sporije od uobičajenih atmosferskih poremećaja pa zato i lakše može dovesti do poplave. Pripadni veliki skokovi atmosferskog tlaka mogu uzrokovati rezonanciju u moru i dovesti to tzv. meteo-tsunami.

Još jednom, pri kraju ovog poglavlja, tornadogeneza još nije dovoljno dobro shvaćena jer prvenstveno nedostaju podaci. Radi se o posebno jakoj i koncentriranoj horizontalnoj vrtložnosti zbog horizontalnih gradijenata uzgona pri tlu uz frontu vihora ('*gust front*') gdje se sukobljuju spuštajući teži zrak ('*convective downdraft*') i vlažni, topli zrak (bitna i latentna toplina). Ako je tornado proizveden u superćeliji (najčešći slučaj), prethodi mu relativno duboka i perzistentna mezo-ciklona promjera nekoliko desetaka km i općenito vrlo jaka vertikalna vrtložnost. Na pručavanju tornada se godinama intenzivno radi, posebice u SAD-u. Pregled pojave mini-tornada (pijavica) u Hrvatskoj se nalazi u Stiperski (2005). Latentna toplina pri evoluciji tornada igra nedovoljno razjašnjenu ulogu. Pripadne CAPE vrijednosti su ~ 2500 do 3000 J/kg , uz izuzetno velike 3D gradijente horizontalnih i vertikalnih komponenata brzine vjetra (vjerojatno najveće procijenjene vrijednosti CAPE-a iz mjerenja su oko 5000 J/kg). Male pijavice (*dust devils*) su u biti tvorevine konvektivnog atmosferskog graničnog sloja (iduće poglavlje), mada pokazuju i mezosklane prekursore. Obično imaju promjer 3 do 10 m i mogu se rastegnuti do nekoliko stotina metara u visinu, traju do nekoliko minuta. Javljaju se u područjima jakih horizontalnih temperaturnih gradijenata u najdonjoj atmosferi, vide se samo ako postoje markeri u zraku, tj. prašina, lišće, slama, itd. Ako je mala zračna pijavica šira, npr. do 20-ak metara u promjeru, onda je često puta sačinjena od nekoliko manjih pijavica umotanih zajedno u zajedničku, veću pijavicu. Čim postoji neka početna vrtložnost u dižućoj česti zraka, dolazi i do rastezanja te rotirajuće česti; rotacija se tako intenzivira zbog očuvanja kutnog impulsa česti.

Duboka konvekcija se na planetarnoj skali može organizirati na više načina, jedan od glavnih je MCS. Samo navodimo nekoliko primjera, poneke od njih proučavamo u nastavi a neki su ostavljeni kao izborne teme studentskih seminara. Intertropska zona konvergencije (ITCZ) je globalno najočitije kvazi-stacionarno područje duboke konvekcije na Zemlji; ima godišnji hod od otprilike 10°N i 6°N . Mada početak konvekcije na ITCZ nerjetko započinje barotropnom nestabilnošću, najčešće se nastavlja oslobađanjem latentne topline. Već je bilo navedeno da se

LOKS-ovi obično javljaju u toplom sektoru ciklone, ispred hladne fronte; dužina im je nekoliko stotina, a širina nekoliko desetaka kilometara i najčešće sadrže organizirane multićelije. Traju 10-tak sati i dulje a mogu se u povoljnim okolnostima regenerirati tijekom nekoliko dana. Imaju horizontalno vrpčastu strukturu, za razliku od MCC koji su kružnog oblika (oboje spadaju u MCS-e).

Najjače tropske ciklone, uragani ('hurricane', 'typhoon') se javljaju najčešće na zapadnim stranama najvećih oceana, tj. blizu istočnih obala najvećih kontinenata; puno su češći na sjevernoj nego na južnoj hemisferi (obično oko 10°N 25°N). U prosjeku se godišnje pojavljuje oko 87 ± 8 imenovanih tropskih ciklona (> 17 m/s) od kojih oko 47 ± 7 postije uragansku jačinu (>33 m/s). Za razvoj uragana već je važna i rotacija Zemlje te vertikalno rastezanje osnovnog vrtloga (ali ne i 'tilting' kao kod super Cb-a). Njihov nastanak još nije sasvim shvaćen i protumačen; neke teorije polaze od međudjelovanja more-zrak ('air-sea interaction theory'), druge od tropske valne dinamike, itd. Ne zna se niti točan razlog zašto gotovo da ih nema na južnoj hemisferi. Za njih integralno, tj. za cijeli sustav, vrijedi hidrostatička aproksimacija (što naravno, nije istina za pojedine oblačne ćelije), te ravnoteža gradijentnog vjetera u polarnom koordinatnom sustavu. Polazeći od ukupnog kutnog impulsa gibanja i spomenutog gradijentnog vjetera u stacionarnom stanju, pokazati ćemo da su tropske ciklone sustavi s toplom jezgrom ('warm core systems'), što je bitno drugačije od izvantropskih ciklona. Dakle, azimutalna brzina v_λ je u gradijentnoj ravnoteži s radijalnom komponentom gradijenta tlaka, tj.

$$\frac{v_\lambda^2}{r} + f v_\lambda \approx \frac{\partial \Phi}{\partial r}. \quad (10)$$

Definiramo li ukupni kutni impuls kao $M_\lambda \equiv v_\lambda r + fr^2/2$, onda slijedi iz ravnoteže (10):

$$\frac{M_\lambda^2}{r^3} - f^2 \frac{r}{4} \approx \frac{\partial \Phi}{\partial r}. \quad (11)$$

Hidrostatička aproksimacija u koordinatnom sustavu logaritamskog tlaka gdje je $z^* \equiv -H \ln(p/p_0)$, $H \equiv RT_s/g$ i T_s je globalna srednja temperatura, glasi:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z^*} = \frac{RT}{H}.$$

Primjenom $\partial/\partial z^*$ (11) slijedi

$$\frac{1}{r^3} \frac{\partial M_\lambda^2}{\partial z^*} \approx \frac{R}{H} \frac{\partial T}{\partial r}. \quad (12)$$

Motrenja u i oko uragana sugeriraju da je iznad tipičnog pripadnog atmosferskog graničnog sloja (ABL, vidi iduće poglavlje) $\partial M_\lambda/\partial z^* < 0$, što znači da T opada s udaljenošću od centra uragana. Dakle, maksimalna temperatura je u i oko centra uragana. Pretpostavimo li da je dubina cijele pripadne troposfere oko 10 km, da je obodna brzina ~ 50 m/s (uraganska brzina), da je radijus dominantnog djelovanja uragana ~ 100 km i da se ovaj nalazi na oko 20° sjeverne zemljopisne širine, skalnom analizom (12) daje radijalnu temperaturnu promjenu $\Delta T \approx 9-10^\circ \text{C}$. Jaki radijalni temperaturni gradijent dovodi do velikog $\Delta \theta_e$ prema centru uragana. Velika latentna toplina ABL-a dolazi iz toplog oceana i hrani uraganovu kinetičku energiju koja se onda uvelike disipira u pripadnom ABL-u, a dio - putem ostalih konverzija energije - ode u višu atmosferu dugovalnim zračenjem dubokih oblaka i generiranjem uzgonsko-inercijskih valova. Prema centru uragana lako dolazi do izentropsko inercijske nestabilnosti jer plohe konstantnih θ_e i M_λ skoro koincidiraju pa se česti zraka lako podižu zbog spiralne konvergencije i nije potrebno

vanjsko forsiranje za to podizanje. U tom je slučaju interakcija ocean-atmosfera, tj. pripadna neravnoteža, glavni uzrok nastanka i pogotovo razvoja uragana. Velika raspoloživa latentna toplina je komplicirana funkcija polja površinskog vjetra, hrapavosti podloge, gibanja oceanskih valova i razlika u temperaturi između zraka i oceana. Za razliku od izvantropske ciklone koja u biti postaje centar hladnog zraka (ako dođe to tipične okluzije), oko toplog centra uragana nema značajnih frontalnih poremećaja.

Uragani se javljaju tek kad je temperatura površine mora iznad 26°C, no izgleda da tek jedan od ~1000 početnih pripadnih tropskih poremećaja, koji nerjetko započinju uz zapadnu obalu Afrike, završi kao uragan. Pored visoke temperature mora, značajne vrtložnosti i relativne vlažnosti srednje troposfere i slabo vertikalno smicanje vjetra čine nužne (ali ne i dovoljne) uvjete za nastanak tropskih ciklona. Polarne ciklone (*'polar lows'*) su polarni ekvivalent tropskim ciklonama, nešto su manje po dimenzijama, ali su također vrlo intenzivne, traju oko tjedan dana i obično sadrže jake *Cb* multićelije. Javljaju se u zimi, uz npr. obale Norveške, Švedske i Danske nakon prodora vrlo hladnog arktičkog zraka nad relativno toplu Golfsku morsku struju. Polarne i tropske ciklone jako ovise o međudjelovanju s morskom površinom, kao i strujanjem zraka na pripadnoj sinoptičkoj skali.

Obzirom da se povećava razlika između globalne prizemne (a time i površinske temperature oceana) i globalne gornje-troposferske i donje-stratosferske temperature, raste u prosjeku i efektivnost uragana kao toplinskih strojeva i uspješnosti u prevođenju toplinske u mehaničku razdioenergiju (uglavnom u formi vjetra i velikih morskih valova). Naime, ta efikasnost je razmjerna razlici temperature između dvaju toplinskih rezervoara (površine oceana s atmosferskim graničnim slojem, te gornje atmosfere, koja u prosjeku malo raste). Stoga je kvalitativno razumljivo da uragani postaju u prosjeku češći i/ili jači.

Takozvani *'Medicane'*-i i *'Biscane'*-i su manji kvalitativni ekvivalenti uragana u Mediteranu i u Biskajskom zaljevu. Isto imaju toplu i nerjetko vedru jezgru, nastaju nad toplim morem, pri uobičajenoj frontogenezi i uz znatno pojačanje visinskom ciklonom (*'cut off low'*). Visinska ciklona pomaže smanjenju vertikalnog smicanja srednjeg vjetra i *'vertikalizaciji'* ciklonalnog vrtloga. To dovodi do relativno barotropnije strukture ciklone, nego što su tipične barokline ciklone. Pripadna nevremena su među najžešćim olujama na Mediteranu, čine velike štete u obalnim zonama zbog izuzetno jakog vjetra, usporedivog s orkanskom burom i jugom, zbog velike količine oborine u relativno kratkom vremenu i zbog stvaranja valnog uspora koji dovodi do velike i nagle denivelacije mora. Slično uraganima i ove ciklone se ponekad mogu transformirati u uobičajene izvantropske ciklone i dalje putovati nad kopnom još nekoliko dana.

U zračnim masama, npr. iza jake hladne fronte, konvekcija se nerjetko organizira u tzv. otvorene ili zatvorene ćelijske sustave, ovisno o relativnom omjeru naoblake i vedrog zraka te prevladavajućeg strujanja i pripadnog srednjeg smicanja vjetra. Otvorene i/ili zatvorene duboke oblačne ćelije (*'open and closed cells'*) se najbolje vide u satelitskim snimkama iznad mora u hladnom zračnom sektoru. Pri tome je bitno stanje najnižeg dijela atmosfere, tj. atmosferskog graničnog sloja. Pripadna mikrofizika (tipovi kondenzacije, rast i transformacije oblačnih i oborinskih kapljica i kristala, oborina pri tlu, itd.) se obrađuje u kolegijima Fizičke meteorologije. Na Sl. 9.2 skicirana je osnovna morfologija atmosferskih kristala. Inace, jedni od najvažnijih mikrofizičkih osobina oblaka su optička debljina i veličina kapljica i kristalića. Naravno, ne smije se zaboraviti važnost oblaka, njihove dinamičke i mikrofizičke osobine te interakcije s ostalim procesima, u prognozi vremena kao i u klimatskim projekcijama gdje su upravo oblaci redoviti uzrok nepouzdanosti (uz npr. stanje podloge, itd.).

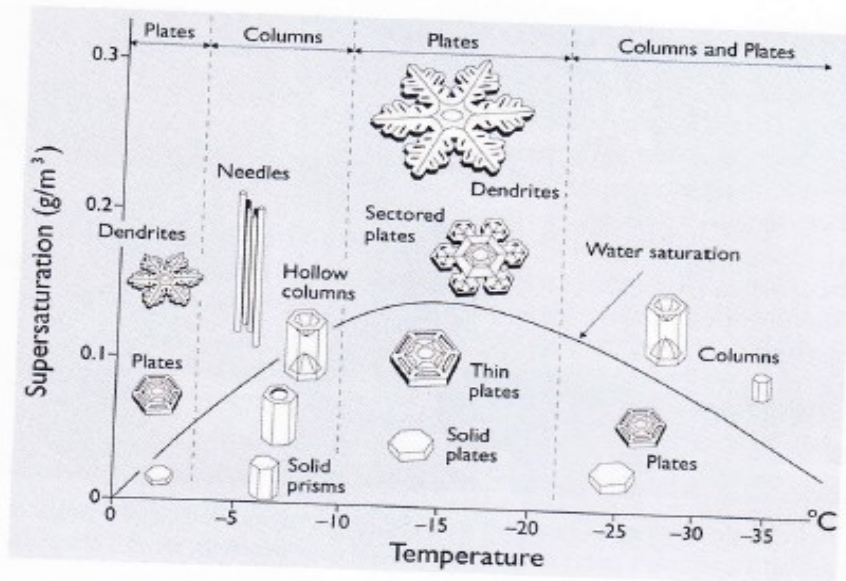


Figure 1. The Nakaya diagram. Snow crystal morphology as a function of supersaturation and temperature. (Source: Nakaya, 1954; from Libbrecht, 2005.)

Slika 9.2 Morfologija najčešćih snježnih kristala u atmosferi u ovisnosti o temperaturi i prezasićenju.

Recentna pitanja o dubokoj konvekciji su višestruka, no ovdje kratko navodimo tek nekoliko važnih pitanja. Numeričko modeliranje konvekcije i dalje ostaje vjerojatno najteže pitanje u meteorologiji a onda i u dinamičkoj klimatologiji, odnosno klimatskim simulacijama. Simulirana konvekcija se neretko pojavi na pogrešnom mjestu, u netočno vrijeme, predugo ili prekratko traje s najčešće pogrešnim intenzitetom a ponekad i tipom oborine. Naime, ključni mehanizmi same strukture konvekcije, oborine i razvoja naoblake često se puta pojavljuju na najmanjim skalama; to znači jaku interakciju sa submezoskalnom dinamikom i uvlačenjem, turbulencijom, mikrofizikom i zračenjem. Simulirani mlazovi ('*updraughts*') su često puta preintenzivni i preuski, ili pak obrnuto, u usporedbi s radarskim i avionskim mjerenjima. Izgleda da tek pri eksplicitno razlučenim oblacima, s npr. $\Delta x \leq 1$ km, $\Delta z \leq 0.2$ km, $\Delta t \leq 30$ s, simulirane mokre kumulusne tvorevine počinju konvergirati stvarnoj konvekciji. Pri tome se uočava i jača disipacija turbulencije na rubovima mlazova što mora ovisiti o jačini samog mlaza. Većina operativnih prognostičkih modela, poput ALADIN-a i AROME-a, koji još uvijek imaju parametrizirane (eksplicitno nerazlučene) vertikalne mlazove i konvektivnu oborinu, uglavnom pogrešno daju pripadne prognoze nevremena u što se možemo najbolje uvjeriti ljeti.

Najveća zrna tuče izmjerena u Hrvatskoj su oko veličine teniske loptice, no zadnji rekord je od 19.7.2023. kad je super-Cb izbacio ledeno zrno u promjeru od čak 13 cm. Svjetski službeni rekord, barem do svibnja 2018. Drži zrno promjera 20.32 cm koje je palo u Vivianu, Južna Dakota, SAD, 23.7.2010. godine. Postoje veći, ali neslužbeni rekordi u najvećim dimenzijama zrna tuče. Izuzetno je teško, skoro nemoguće u današnjim uvjetima, prognozirati ovakve ekstremne događaje.

Zna se da je Mediteran podložan putujućim nevremenima s jakom oborinom što ponekad dolazi u obliku MCS-a. Pri tome isparavanje iz toplog mora kombinirano s relativno hladnim suhim zrakom u visini pomaže razvoju konvekcije u MCS-u i to pojačava rizik za intenzivnu oborinu i priobalne poplave. Glavni uzrok takvih vremenskih situacija je dizanje uvjetno nestabilnog

morskog zraka koji se sudara s obalnim planinama. Na primjer, južni dio Dalmatinske zagore često puta dobije najviše snijega za vrijeme prodora vlažnog zraka s jugozapada koji se diže preko Biokova i onda prelazi preko Zagore. Poteškoće u numeričkom modeliranju pothlađenih kapljica oblaka, mikrofizike leda i prognoze statističke raspodjele ledenih zrna u oblaku očituju se i u neadekvatnoj prognozi duboke konvekcije i pripadne oborine. Dinamika razvoja hidrometeora u oblaku je jako povezana s količinom vodene pare, prostorno-vremenskom raspodjelom kristalića leda i turbulencijom. Početak sijevanja i grmljavine iz mediteranskih MCS-a obično se nalazi u području malih zrna leda, a rjeđe oko sitne, već formirane tuče. Pokazano je da pijesak iz Sahare, pun minerala, vjerojatno služi kao jako dobar izvor jezgri kondenzacije i zaleđivanja. Pouzdana prognoza takvih i sličnih nevremena, čak s najboljim današnjim modelima i najfinijom dopustivom rezolucijom, ne prelaze nekoliko sati u budućnost. Takve se poteškoće onda još izražnije očituju u nepouzdanosti klimatskih projekcija u budućnost.

10. PLANETARNI GRANIČNI SLOJ

Uvod

Ovdje počinje zadnja cjelina mezoskalne meteorologije ulazeći u mikroskalnu meteorologiju. Najosnovniji je pojam ovdje turbulencija: pripadno mjerenje, statistički tretman i matematičko obrađivanje u teorijskim i numeričkim modelima. Glavna pretpostavka u meteorološkoj primjeni teorije turbulencije je najvjerojatnije (ne)opravdanost Reynoldsovog usrednjavanja. Za uspješno praćenje ove cjeline nužno je da student ponovi statističke metode geofizike, uvod u dinamiku geofizičkih fluida ili klasičnu hidrodinamiku, ostale dijelove dinamičke meteorologije te sadržaj ekvivalentan dosadašnjem toku ove skripte. Turbulentno strujanje znači jako pojačano miješanje u fluidu; ono je karakterizirano nestacionarnim višeskalnim interaktivnim gibanjem uz dominantne slučajne komponente spomenutog strujanja.

Ovdje ćemo se baviti pravom, tj. 3D turbulencijom, za razliku od 2D, „kvazi-turbulencije“. Ovu drugu, tj. 2D „turbulenciju“ smo donekle dotakli u kvazi-geostrofičkoj teoriji, npr. u proučavanju rješenja barotropne jedn. vrtložnosti. Jedna od osnovnih osobina 2D i kvazi-geostrofičke turbulencije je stvaranje koherentnih struktura velike skale među fluktuacijama vrtložnog polja na maloj skali (što u prosjeku nije dozvoljeno u pravoj, 3D turbulenciji). Dakle, 2D turbulencija ima tendenciju organiziranja u kvazi-stacionarne koherentne strukture i gubitak neprediktabilnosti. Ovakvo ponašanje u separaciji skala je dinamička posljedica očuvanja i energije i enstrofije (kvadrat vrtložnosti) koja onda rezultira neto-tokom energije prema velikim skalama i neto-tokom enstrofije k malim skalama. Zato se mnoge vrste gibanja na velikoj skali (npr. „slobodna gibanja“ bez forsiranja, što se vrlo postupno razvijaju i eventualno prigušuju, ili pak gibanja uz blago forsiranje) mogu približno opisati kao velike koherentne determinističke strukture na jednoj strani (ciklone, anticiklone, mlazna struja, itd.), te neorganizirana uglavnom slučajna gibanja na maloj skali. Budući da je enstrofija važna i očuvana veličina u 2D „turbulenciji“ i vrtložnost se u bezdivergentnom 2D strujanju ponaša kao očuvani skalar. Tu se plauzibilno može reći da se gustoća kinetičke energije (energija po jedinici mase zraka i po valnom broju k) u prosjeku ponaša⁵ kao $E_k \sim k^{-3}$ (vidi dalje o statističkoj teoriji turbulencije).

Planetarni granični sloj (*engl.* 'Planetary Boundary Layer', PBL, ili 'Atmospheric Boundary Layer', ABL)) je donji dio troposfere u kojem su fizička polja odnosno vrijeme u meteorološkom smislu pod direktnim utjecajem Zemljine površine (prvenstveno mehaničkim i termičkim). Tradicionalno se dijeli na 3 podsloja: viskozni (debljine ~ 1 mm), prizemni (~ 1 do ~ 100 m eventualno i do 300 m) te sloj miješanja ili vanjski sloj (~ 1 km) tipično ali ne i nužno pokriven sinoptičkom inverzijom koja ga dijeli od tzv. slobodne atmosfere. Najdonji podsloj, viskozni, je meteorološki nevažan. Prizemni (unutarnji) sloj je karakteriziran približno konstantnim turbulentnim tokovima po visini ($\sim 80\%$ konstantnosti); u njemu dominantni vrtlozi u prosjeku rastu s udaljenošću od podloge (uz modifikacije zbog smicanja i stratifikacije). U vanjskom, tipično najdebljem sloju, miješanje dominantnim vrtlozima postiže obično maksimalni intenzitet; vrtlozi odgovorni za miješanje više ne rastu s udaljenošću od podloge već su približno konstantnih dimenzija određenih visinom prizemnog sloja ispod i inverzijom iznad sloja miješanja (vanjskog sloja). Postoje znatna odstupanja od spomenutih debljina PBL-a.

Dinamika strujanja u graničnom sloju nije direktna posljedica viskoznosti, već je uvelike određena činjenicom da je atmosfersko strujanje po prirodi turbulentno, tj. vrlo kaotično i s jako puno stupnjeva slobode. I dok se u slobodnoj atmosferi turbulencija može tipično zanemariti (gibanja na sinoptičkoj skali aproksimiramo tom pretpostavkom), u graničnom sloju jednadžbe gibanja moraju uključivati i turbulentne efekte. Budući da je PBL praktički stalno turbulentan, znači da je od početka razvoja prošao kroz nekoliko kaskada nelinearnih transfera energije, od npr. početno tek blago nelinearnog strujanja, nizom bifurkacija i rapidnog razvoja kaotičnog

⁵ Pretpostavimo da vrijedi $E_k = C\omega^\alpha k^\beta$, $C = \text{const}$; budući da je dimenzija $[E_k] = \text{m}^2\text{s}^{-2}/\text{m}^{-1}$, slijedi da je $\alpha = 2$, $\beta = -3$, tj. $E_k = C\omega^2 k^{-3}$.

gibanja, da je većina individualnih koherentnih struktura uglavnom prešla u gotovo slučajno, jako izmiješano gibanje (npr. sasvim isprepletene 3D strujnice) uronjeno u osnovnu struju. Drugim riječima, nestabilnosti su velike i kontinuirane u vremenu i prostoru PBL-a pa dominira stohastička, a ne deterministička priroda PBL-a (kad govorimo o turbulenciji tog sloja).

U razvoju malih turbulentnih vrtloga ključnu (mada donekle prikrivenu, tj. indirektnu) ulogu ima viskoznost i tzv. neproklizavajući donji rubni uvjet ('*no-slip lower boundary condition*') – iščezavanje brzine na čvrstoj površini/podlozi. Zbog tog rubnog uvjeta i relativno slab vjetar uzrokuje smicanje blizu površine koje zatim vodi k stvaranju turbulentnih vrtloga. Vrtlozi uzrokovani smicanjem, kao i konvektivni vrtlozi nastali npr. izjaravanjem tla i konvektivnim prijenosom topline u visinu, predstavljaju vrlo efektivan način prijenosa impulsa na površinu, te topline i vlage s podloge. Turbulentni vrtlozi obavljaju taj prijenos puno efektivnije nego molekularni procesi, ovisno o iznosu Reynoldsovog broja, $Re = UL/\nu$ gdje su U i L tipična brzina i geometrijska dimenzija strujanja a ν je kinematička viskoznost; Re u PBL-u je oko 10^5 do 10^8 i to govori koliko su jači konvektivni i advektivni od viskoznih članova u NS jednadžbama gibanja. Turbulentni vrtlozi održavaju energetska ravnotežu na površini kao i ravnotežu impulsa, a geostrofičko strujanje više nije adekvatna aproksimacija za polje prizemnog vjetra. Ravnoteža strujanja u PBL-u je u prvoj aproksimaciji postignuta, grubo rečeno, između turbulentnog trenja, Coriolisove sile i gradijenta tlaka.

Debljina atmosferskog graničnog sloja, tj. PBL-a nastalog turbulentnim transportom varira od skromnih ~20 m u uvjetima ekstremno velike statičke stabilnosti i slabog vjetra, do više od 3 km u izrazito konvektivnim uvjetima. Uz standardne uvjete u atmosferi granični sloj se na umjerenim geografskim širinama proteže do otprilike jednog kilometra od površine, te sadrži ~ 10 % mase atmosfere, no očito je da može jako varirati u vremenu i prostoru. U našim izvantropskim širinama atmosferski PBL je dublji ljeti i danju, a plići i stabilniji zimi i noću; dakle, postoji dnevni i godišnji hod debljine PBL-a i pripadnih mu polja (npr. intenziteta turbulentne energije, vertikalnih turbulentnih tokova impulsa, topline, vlažnosti, primjesa, itd.). Karakteristike PBL-a variraju i sa prolazima sinoptičkih sustava. U prosjeku su procesi u PBL-u intenzivniji u tropskim širinama, nego u npr. polarnim. Čak i najjednostavnija skalna analiza sugerira da je npr. subtropski PBL značajno dublji od polarnog: ako je karakteristična turbulentna brzina $u^* \sim 0.5 \text{ ms}^{-1}$ i $f = 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ odnosno $1.2 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ (slikovito, kao da jedan parametar dolazi odozdo, a drugi odozgo, tj. f), onda je zbog pripadne dubine $h_{PBL} \sim u^*/f$ drugi, tj. polarni PBL, za više od reda veličine niži od subtropskog PBL-a. No, to nikako ne znači da je polarni PBL manje važan ili jednostavniji. Dapače, upravo polarni krajevi, posebice Arktik, doživljavaju najintenzivnije zatopljenje ovih desetljeća (2 do 4 puta jače od globalnog prosjeka) i ponašanje relativno tankog pripadnog PBL-a, malog toplinskog kapaciteta, je od ključne važnosti za pripadnu buduću klimu.

Dinamička (ne)stabilnost

Podsjetimo se poglavlja 6. U uvjetima statički stabilnog zraka smicanje vjetra može dinamički uzrokovati turbulenciju. Na primjer, iako su KH valovi vjerojatno česti u statički stabilnim slojevima smicanja zraka ('*shear layer*'), samo se rijetko mogu opaziti golim okom. Ponekad postoji istovremeno dovoljno vlage i jezgri kondenzacije u atmosferi što omogućuje da kapljice vodene pare služe za kvalitativno vizualno praćenje strujanja zraka. Oblaci koji se formiraju u uzdižućim dijelovima valova često formiraju paralelne savinute „trake“ koje se prekreću u prostoru ('*billow clouds*'); prikazani su na Sl. 6.1 i 6.2. Orijentacija tih oblačnih „traka“ je približno okomita na srednji vektor vertikalnog posmaka vjetra. Vektor smicanja vjetra ne mora nužno biti usmjeren u smjeru srednjeg vektora vjetra. Uglavnom, smicanje vjetra je osnovni uzrok dinamičkih nestabilnosti zraka.

Zanimljivo je istaknuti da fluid reagira na način da poništi (dokine) uzrok nestabilnosti. Sustav teži u minimum potencijalne energije. Taj je proces sličan *Le'Chatelier*-ovom principu u kemiji.

Tako je turbulencija sustav mehanizama pomoću kojeg tokovi fluida nastoje poništiti uzrok nestabilnosti izjednačavajući prostorne gradijente u strujanju. U slučaju statičke nestabilnosti, *konvekcija* se pojavljuje ne bi li potisnula čest fluida prema gore i tako stabilizirala sustav. U slučaju dinamičke nestabilnosti, turbulencija nastoji smanjiti posmak vjetra i na taj način, također, stabilizira sustav.

Turbulencija djeluje u smislu samouništenja, tj. dokidanja same sebe. Nakon što se nestabilan sustav stabilizira, turbulencija slabi. Promatranja dugotrajne pojave turbulencije u *BL* ('*boundary layer*') upućuju na logičnu pretpostavku kako postoji vanjska sila koja nastoji destabilizirati granični sloj kroz dulji vremenski period. U slučaju statičke nestabilnosti solarno zagrijavanje i divergencija toka zračenja je ta vanjska sila. U slučaju dinamičke nestabilnosti gradijenti tlaka nametnuti elementima na sinoptičkoj skali suprotstavljaju vjetar disipativnim efektima turbulencije. Turbulenciju možemo opisivati slično kao i život, no vrlo je teško dati dobru definiciju turbulencije (ili života?). Tennekess i Lumley (1971) te još neki veliki znanstvenici ni ne pokušavaju definirati turbulenciju, već je pokušavaju sažeto opisati, tj. što medij mora ispunjavati pa da je turbulentan (slično se opisuje i život). Dakle, fluid mora strujati neregularno, difuzivno, šireći svoje osobine u 3D prostoru i vremenu, imati veliki Reynoldsov broj, 3D fluktuacije vrtložnosti, disipaciju i kontinuitet da bi bio u turbulentan. Upravo navedeno je i razlog da se turbulencija ne može invertirati u vremenu, dok se npr. uzgonski i drugi donekle slični valovi mogu (jer su prvenstveno linearni i nedifuzivni).

U turbulentnom strujanju postoji međudjelovanje između različitih prostorno-vremenskih skala gibanja. Strujanje je turbulentno ako mu je prediktabilna vremenska skala kraća od one koja nas zanima. Na primjer, ako nas zanimaju gibanja planeta u Sunčevu sustavu na vremenskoj skali do milijun godina i kraće, onda su ta gibanja prediktabilna, poput laminarnog strujanja. No, ako nas zanimaju pripadna gibanja za više stotina milijuna godina ili još dulje, onda su takva gibanja planeta kvalitativno analogna turbulentnom gibanju. Turbulentno strujanje je neuređeno (engl. *disordered*) u prostoru i vremenu.

U numeričkim prognostičkim modelima, kao i u klimatskim modelima (koji su nastali od prognostičkih), turbulencija i posebice sheme za njeno parametriziranje u ABL-u odgovorni su za prizemno trenje koje utječe na gibanje zraka na velikoj skali kroz NS jednadžbe i ageostrofičko strujanje. Npr. veliko turbulentno trenje prigušuje 'aktivnost' modela i pripadne sinoptičke sustave, što je često puta poželjno za rezultate meteorološke operative – vjerojatno zato što kompenzira druge slabosti modela.

Teorijski problem turbulencije obično se svodi na postojanje većeg broja nepoznanica od broja prognostičkih jednadžbi; matematički gledano, radi se o nereducibilnom sustavu u kojem uvijek treba nešto pretpostaviti o nekim osobinama nepoznatih turbulentnih (statističkih) polja. Dakle, radi se o problemu zatvaranja dinamičkog sustava jednadžbi ('*closure problem*'). Postoji više praktičnih izbora reda zatvaranja parametrizacije turbulentne sheme (teorijski ih ima proizvoljno mnogo), a kompleksnost im progresivno raste s redom zatvaranja. Prvi red zatvaranja je parametrizacija kvadratnih turbulentnih polja (korelacije) tipa $u'w'$, $v'w'$, $\theta'w'$, $p'w'$, itd. na osnovi srednjeg stanja (U , θ , p , itd.) i prikladno dijagnosticiranih koeficijenata proporcionalnosti između tih srednjih polja i nepoznatih turbulentnih tokova (korelacija). Takve formulacije onda ulaze u osnovne jedn. kao npr. opis turbulentnog trenja, odnosno turbulentnih tokova. To je tzv. K-teorija (primitivna) u užem smislu riječi. Drugi red zatvaranja je prognoza spomenutih kvadratnih, tj. bilinearnih turbulentnih polja, tj. korelacija, u kojima pak treba opisati triplet-korelacije viših statističkih momenata izvedenih iz $u'v'w'$, u'^2w' , $\theta'u'u_j'$, itd. u beskonačnost. Između 1. i 2. reda zatvaranja postoje različiti (među-)nivoi zatvaranja, ovisno o tipovima pretpostavki i broju prognoziranih i diagnosticiranih tokova (korelacija). Uobičajeno je kompletan 2. red zatvaranja zvati 'nivo 4', dok se proračun samo stacionarne kinetičke energije turbulencije, tj. prikladni prosjek od $0.5(u'^2 + v'^2 + w'^2) = TKE$, naziva 'nivo 2' (ostale se

korelacije onda dijagnosticiraju iz tako dijagnosticirane TKE). Ako se samo prognozira TKE, a svi ostali momenti 2. reda (ostali tokovi, tj. korelacije) se dijagnosticiraju, onda se to tradicionalno naziva 'nivo 2.5' ('level 2.5'). Zatim, ako se prognoziraju TKE i prikladni prosjek od θ^2 , dok se svi ostali momenti opet dijagnosticiraju, onda je to 'nivo 3' zatvaranja sheme parametrizacije turbulencije, itd. Može se ići i u suprotnom, donekle nekonstruktivnom smjeru pa da se koriste parametrizacije nižeg reda zatvaranja od 1 (npr. reda 0.5) tako da se tek djelomice koriste srednja polja za opis turbulentnih tokova.

Očito da su znanstvenici i inženjeri zaključili da je TKE, tj. trag matrice usrednjenih (ko)varijanci $u_i'u_j'$ jako važan u opisu turbulentnih procesa. Do kraja ove skripte kad god budemo govorili o višem redu zatvaranja parametrizacije turbulencije, misliti ćemo na TKE (ako se to drugačije eksplicitno ne kaže). Nadalje, preostala razmatranja će se odnositi samo na 1. red zatvaranja (K-teorija u užem smislu rječi) i viši red zatvaranja, nivoa 2 ili 2.5.

Usporedbom relativnih magnituda produkta smicanja i članova uzgonske destrukcije u TKE jednadžbi nadamo se da možemo procijeniti kada tok postaje dinamički nestabilan. Richardsonov broj, Ri , te njegova fluks-forma – što vrijedi za ABL, se mogu iskoristiti kao pojednostavljeni indikator grubih turbulentnih formi (konvektivnost, lokalna neutralnost, stratificirana turbulencija i mnoge pod-klase). Turbulenciji se najčešće pristupa tako da se statistički tretiraju NS jednadžbe i posebna se pažnja posvećuje korelacijama turbulentnih fluktuacija gibanja. Vrlo rijetko znamo odrediti raspodjele svih statističkih momenata turbulentnih (dakle, u biti slučajnih) polja; stoga se fokusiramo na ponašanje pojedinih korelacija fluktuacija tipa u_i' , kasnije eventualno i njihovih triplet kombinacija kao npr. $u_i'u_j'\theta'$, itd. Pri tome znamo da vrijede spomenute osnovne jedn. gibanja i termodinamike, pretpostavljamo da vrijedi dekompozicija polja na osnovno i fluktuirajuće stanje (Reynoldsova dekompozicija) te da možemo dobro definirati srednjake u turbulentnom strujanju. Dekompozicija i usrednjavanje je jedan od najvećih poteškoća u uspješnom tretiranju turbulencije.

Simbolički zapis TKE

Jedan od jednostavnijih zapisa TKE (izvod slijedi kasnije) je:

$$D(TKE)/Dt = \bar{\tau} \cdot \bar{S} + g\overline{w'\theta_v'} / \theta_0 - \varepsilon - \frac{\partial F_K}{\partial z}, \quad (1)$$

gdje je 1. član na desnoj strani produkt vektora napetosti $\bar{\tau} = -(\overline{u'w'}, \overline{v'w'})$ i smicanja vjetra po vertikali (inače, napetost je u stvari tenzor 2. reda, ali u ovoj pojednostavljenoj formi prognoze TKE uzimamo samo 2 člana pa se to onda ponaša kao vektor), 2. član je uzgonski, 3. je disipacija i 4. je vertikalni transport TKE (točnije: vertikalna komponenta divergencije tog transporta, koji se nerjetko zanemaruje, ne zato što je općenito mali, nego stoga jer često ne znamo kako da ga ispravno tretiramo!). Sličan zapis razvoja TKE je dao i Richardson prije više od 100 godina. Očito da su prva 2 člana odgovorni za produkciju TKE, gdje 2. (uzgonski) član može biti i destruktivan ako je stratifikacija fluida stabilna; tada taj član stabilizira strujanje oduzimajući TKE i prevodeći je u jačanje stabilnosti. Uskoro ćemo proučavati odnos tih dvaju članova. Disipacija uvijek predstavlja destrukciju TKE-a i djeluje najjače na najmanjim skalama, posebice, recimo oko 1 cm i manje, gdje viskoznost počinje igrati presudnu ulogu. Transport je nelokalna veličina, bitna za organizaciju turbulentnih struktura i ima doprinose od preraspodjele tlakom i same TKE.

Richardsonovi brojevi i TKE

Srednja i fluktuirajuća (turbulentna) polja u npr. (1) mogu međudjelovati na više načina. Pokušat ćemo kvalitativno objasniti i kvantitativno opisati neka od takvih mogućih međudjelovanja. Turbulentna kinetička energija, TKE, $(\bar{e} = 0.5(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2}))$ je mjera intenziteta turbulencije; (u', v', w') predstavljaju turbulentne fluktuacije pojedine komponente brzine a potez

predstavlja srednjak ansambla (koji se obično aproksimira vremenskim srednjakom mjerenja u nekoj točki, odnosno vremensko-prostornim srednjakom po pripadnom računskom koraku u numeričkim modelima). Direktno je TKE povezana uz transport količine gibanja, topline i indirektno vlažnosti. U jednoj od kasnijih lekcija bit će prikazan detaljan izvod zajedno s prognostičkom jedn. za Reynoldsov tenzor turbulentnih napetosti, $\overline{u_i' u_j'}$; ovdje nam treba TKE radi izvoda Richardsonovog fluks broja, tj. vrste poopćenja Ri . Inače, TKE se obično izražava u J/kg tj. (m/s)². Tipičan primjer kovarijance $\overline{u_i' u_j'}$ je $\overline{u' w'}$ što predstavlja vertikalni turbulentni tok x -impulsa i sastoji se od koherentnog doprinosa cijelog raspona (spektra) različitih veličina turbulentnih vrtloga. Kvizistacionarni turbulentni tokovi se mogu precizno i objektivno odrediti kad im je kumulativni tok (tj. fluks integriran od doprinosa malih do velikih turbulentnih vrtloga) konstantan pri povećanju veličine vrtloga, ili smanjenju frekvencije.

Često je upravo jednadžba očuvanja TKE polazište u aproksimaciji turbulentne difuzije, mada ima i jednostavnijih a općenitijih pristupa (npr. Mauritsen i sur. 2007). Može se pokazati da se prognostička jedn. za TKE može napisati, umjesto polu-simbolički kao u (1), eksplicitnije:

$$\underbrace{\frac{\partial \bar{e}}{\partial t}}_I + \underbrace{\bar{u}_j \frac{\partial \bar{e}}{\partial x_j}}_{II} = \underbrace{\frac{g}{\theta_v} (\overline{w' \theta_v'})}_{III} - \underbrace{u_i' u_j' \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}}_{IV} - \underbrace{\frac{\partial \bar{u}_j' e'}{\partial x_j}}_V - \underbrace{\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial (\bar{u}_j' p')}{\partial x_j}}_{VI} - \underbrace{\frac{\epsilon}{\nu}}_{VII}, \quad (2)$$

gdje su pojedini članovi:

- | | |
|--|--|
| I – lokalna promjena TKE | V- turbulentni transport TKE, tu je $e = e'$ |
| II – advekcija TKE srednjim strujanjem | VI - preraspodjela TKE fluktuacijama tlaka |
| III – uzgonska produkcija/destrukcija | VII – viskozna disipacija TKE |
| IV – smicanje i turbulentna napetost (produkcija). | |

Individualni članovi u proračunu TKE tj. (2) opisuju fizikalne procese koji generiraju, prenose ili guše turbulenciju (očito da TKE nije hamiltonijanska veličina jer ima disipaciju). Relativna ravnoteža tih procesa određuje sposobnost fluida da zadrži turbulentna svojstva, da laminarno strujanje prevede u turbulentno ili možda obrnuto. Na TKE jednadžbi temelje se određeni važni bezdimenzijski članovi kao i parametri skaliranja. Jedan od takvih parametara je Richardsonov broj.

Richardsonov fluks broj naglašava relativni doprinos dvaju osnovnih TKE članova, tj. produkcijskih (ili uvjetno, u statički stabilnoj stratifikaciji destrukcijskog člana III) članova III i IV; definiran je kao:

$$Ri_f = \frac{\frac{g}{\theta_0} \overline{w' \theta_v'}}{\left(\overline{w' u' \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}} + \overline{w' v' \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}} \right)} \quad (3)$$

gdje su zanemareni iz (2) određeni doprinosi TKE-u tako da je pretpostavljena horizontalna homogenost strujanja i turbulentnog polja te da nema srednje vertikalne brzine. Dakle, između

(2) i (3) je pretpostavljeno: $\left| \frac{\partial}{\partial x} \right| \cong \left| \frac{\partial}{\partial y} \right| \approx 0, \bar{w} = 0$. Uzgonski efekti u brojniku su uspoređeni s efektima smicanja i turbulentne napetosti u nazivniku od (3). Naravno da ako turbulentne fluktuacije (tj. slučajne perturbacije) nisu uopće korelirane, da je onda $\overline{u_i' u_j'}$ u (2) trivijalno nula

i nazivnik u (3) ne bi imao smisla. Ako je (3) negativan, strujanje je konvektivno i statički nestabilno; to se npr. događa uz suncem jako grijanu podlogu. Ako je (3) pozitivan a ipak dovoljno mali, mogu postojati dinamičke nestabilnosti koje podržavaju turbulenciju; dakle, R_{if} ima neke sličnosti s Ri . I konačno, ako je (3) dovoljno velik i pozitivan, strujanje prestaje biti turbulentno u običnom smislu riječi, tj. počinje se ponašati uglavnom kao laminarno strujanje (bar u tipičnim situacijama). Primijetimo da $R_{if} \leq 1$. Prijelaz između očito turbulentnog u praktički laminarno strujanje se ne događa kod istih vrijednosti parova brojeva R_f i Ri , znači njihovih, uvjetno ih nazovimo, „kritičnih vrijednosti“, kao kad strujanje prelazi iz laminarnog u turbulentno strujanje. Prijelaz od približno laminarnog (ako ga jer prethodno uopće bilo) u očito turbulentno strujanje često se događa oko $(R_{if}, Ri) \approx (0.21-0.4; 0.25-0.6 = ?)$, a obrnuto, tj. iz turbulentnog u pretežno laminarno strujanje je najčešće oko $(0.23-0.4, \gg 1)$. Dakle, radi se o velikoj 'histerezi' (prvenstveno) Ri broja. Konkretno, vrijednosti ovise o detaljima strujanja, načinu izračunavanja ovih brojeva iz mjerenja i modela, itd. Nadalje, R_{if} je mjerodavniji pokazatelj turbulentnosti nego Ri , jer Ri se najčešće ne računa na osnovi odvojenih turbulentnih i osnovnih polja, već se dobija u biti iz ukupnih, najčešće srednjih polja strujanja (to treba uvijek provjeriti – kako je Ri izračunat u pojedinom slučaju). Ipak, dokazano je da ne postoji kritičan Ri broj iznad kojeg ne bi postojala turbulencija (npr. Mauritsen i sur. 2007). Stoga je priča o kritičnom Ri ispričana prvenstveno iz povjesnih razloga.

Ako ipak pretpostavimo da se spomenute korelacije fluktuacija brzine i vertikalnog transporta temperature ponašaju slično u odnosu na osnovne tj. srednje gradijente, onda se R_{if} jednoznačno povezuje s Ri . Naime, uz spomenute pretpostavljene proporcionalnosti: $-\overline{w'\theta_v'} \propto \frac{\partial \overline{\theta_v}}{\partial z}$, $-\overline{w'u'} \propto \frac{\partial \overline{u}}{\partial z}$, $-\overline{w'v'} \propto \frac{\partial \overline{v}}{\partial z}$, također pretpostavimo privremeno svugdje iste brojeve proporcionalnosti, npr K ; onda R_{if} prelazi u Richardsonov gradijentni broj:

$$R_i = \frac{\frac{g}{\theta_v} \frac{\partial \overline{\theta_v}}{\partial z}}{\left[\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{v}}{\partial z} \right)^2 \right]}, \quad (4)$$

gdje se srednjaci u (4) u praksi najčešće odnose na ukupna polja (neusrednjena). No, obično spomenute K -vrijednosti u proporcionalnostima nisu iste pa ako 'termalni K ' nazovemo K_h , a 'mehanički K ' nazovemo K_m , onda (3) i (4) dovode u ABL-u do

$$R_{if} = (K_h/K_m) Ri = Pr_{turb}^{-1} Ri, \quad (5)$$

gdje bi Pr_{lam} bio tzv. Prandtlov broj, omjer kinematičke difuzivnosti i termalne konduktivnosti (konstante za svaki fluid kao takav, tj. u laminarnom stanju), ali za turbulentno strujanje to je Pr_{turb} , odnosno omjer vrtložne difuzivnosti i turbulentne termalne konduktivnosti. Ovi su parametri ovisni o strujanju. Dalje govorimo samo o Pr_{turb} pa ćemo pisati samo Pr . Nedovoljno se zna o detaljnom ponašanju Pr broja, posebice u stabilno stratificiranom turbulentnom strujanju gdje progresivno sve manji vrtlozi dominiraju turbulentnim osobinama strujanja. Očito da turbulencija može postojati za skoro svaki Ri ako je $Pr > Ri$ tako da R_{if} ostane u približno zadanim granicama za turbulenciju strujanja. Dugo su numerički prognostički modeli tipa Aladin i Hirlam, koristeći tzv. sheme 1. reda zatvaranja parametrizacije turbulencije, implicitno držali Pr (gotovo) konstantnim, nevažavajući velike varijacije i općeniti porast Pr pri rastućim Ri (jer pri sve većoj stabilnosti, odnosno Ri , sve je slabiji vertikalni prijenos topline dok to ne vrijedi za impuls). Ponovimo, (4) ovisi samo o srednjem strujanju i pripadni porast od Ri nije ograničen internim stanjem turbulencije i osobinama prijenosa impulsa i topline turbulentnim tokovima.

Kad se pozivamo na "Richardsonov broj" bez naznake na koji se to odnosi, obično mislimo na gradijentni Richardsonov broj. To je u poglavlju 6 bio izraz (7). Zastarjela teorijska i laboratorijska istraživanja su sugerirala da laminarni tok postaje nestabilan (uz npr. nastanak KH valova, ali oni ni jedini i glavni uzročnik turbulencije) i početak turbulencije kad je Ri manji od nekog kritičnog Richardsonovog broja R_C . Druga vrijednost, R_T određivala gušenje turbulencije (spomenuta histereza Ri broja). Ipak, vertikalni gradijenti srednje brzine vjetra i temperature tek su vanjske varijable, ili parametri za stvarno stanje turbulencije.

(Kriterij dinamičke stabilnosti davno prije idealizirano se i naivno iskazavao kao da laminarni tok postaje turbulentan kad $Ri < R_C$, a turbulentni tok postaje laminaran kad $Ri \geq R_T > R_C$. No, to je zastarjeo i prilično naivan pristup atmosferskoj turbulenciji.)

Podsjetimo se još jednom značenja Ri , tj. (4). To je kvadrat omjera dvije važne frekvencije: uzgonske i vertikalnog smicanja vjetra. Drugim riječima, to je omjer kvadrata dviju vremenskih skala: karakterističnog trajanja vertikalnog smicanja srednjeg vjetra i trajanja uzgonske oscilacije. Ako je npr. $Ri > 1$, to znači da je na nekoj određenoj visini karakteristična uzgonska oscilacija brža od vremena potrebnog da se stvori pripadno smicanje vjetra. To onda sugerira da se radi o umereno ili jako stratificiranoj turbulenciji na promatranom nivou. Međutim, kad se (4) računa digitaliziranim stvarnim podacima, npr. iz sondaže, onda se nužno radi o slojevima debljine Δz i o pripadnom srednjem Ri za taj sloj. Onda se tu javlja nezanemariv problem jer je $Ri \sim \Delta z$.

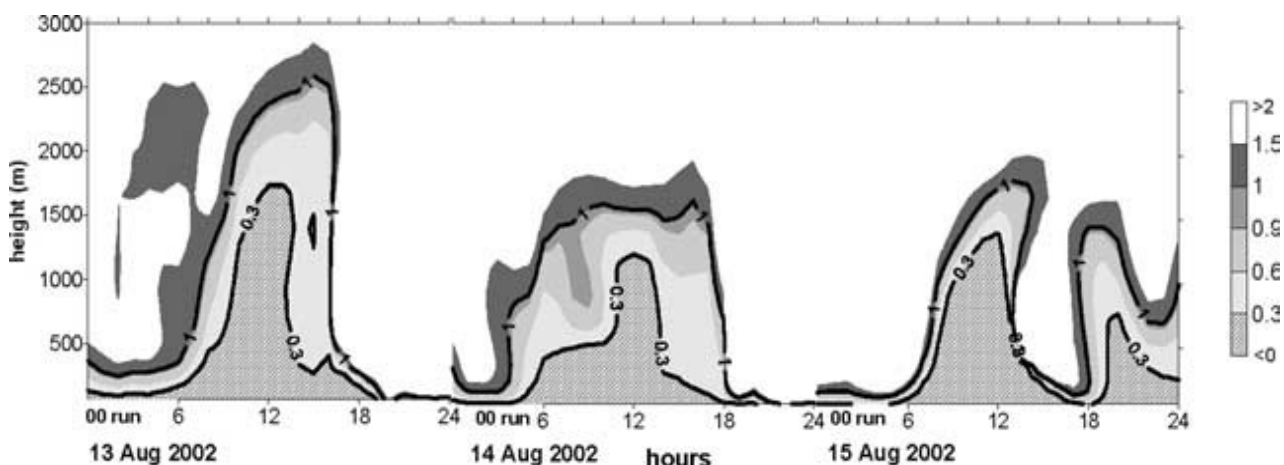
Kao što je već spomenuto, čini se da je tek ponekad ispunjeno da $R_C \approx 0.25$ i $R_T \approx 1$ (kad postoji izuzetno dobra vertikalna rezolucija mjerenja i računanja i ako su KH valovi jedini mogući mehanizam generiranja stratificirane turbulencije); malo veće su se vrijednosti i koristile u praksi do nedavno (npr. Jeričević i Grisogono 2006). Postoje efekti histereze budući da je R_C manji od R_T . Ipak, pogrešan je cijeli koncept turbulentnog R_C i R_T , za sve vrste atmosferskog turbulentnog strujanja, između ostaloga i zbog približne proporcionalnosti između Ri i Pr . Problem je u stvari fundamentalnog tipa i uopće ga nije moguće svesti na pojavu i prestanak atmosferske turbulencije kao „postojanje“ relativno jednostavnih kritičnih brojeva poput R_C i R_T (Mahrt, 1998, 2007; Baklanov i Grisogono 2007; Mauritsen i sur. 2007; Zilitinkevich i sur. 2013). Nažalost, ovaj se pogrešan koncept i dalje ponegdje (naivno) koristi u tumačenjima i parametrizaciji turbulencije.

Za turbulenciju su potrebna 2 uvjeta: nestabilnost i mehanizam okidanja tj. pokretanja nestabilnosti. U atmosferi uvijek postoji više vrsta gibanja; stoga i ona koja mogu izgledati kao nevažna, mogu dovesti to nestabilnosti. Zato ne postoji jedan kritičan Ri , već mnogo pa onda cijeli koncept je beskoristan. Laboratorijski i teorijski radovi upućuju na to da je kriterij za stvaranje velikih (i onda nestabilnih) KH-valova $Ri < R_C$. To vodi na očiglednu histerezu, budući da se Ri broj neturbulentnog strujanja mora spustiti do R_C prije nego se stvori turbulentni režim, a isti opstaje sve dok Ri ne poraste iznad R_T . U strujanju postoje različiti poremećaji, poput uzgonskih valova, zatim, kvazi-horizontalne djelomice-rotirajuće i meandrirajuće strukture, poput vrlo iskrivljenih, spljoštenih vrtloga, što dovode do vertikalnog smicanja zraka zbog novonastalih različitih slojeva u fluidu. Za uzgonske valove znamo da dobro prenose impuls, ali ne i toplinu (bar dok su približno linearni i kvazi-stacionarni) i tako mogu modulirati Pr [u jedn. (2) član VI kroz perturbacije tlaka može povezivati valove i TKE]. Sve navedeno upućuje da nije moguće definirati jedan kritičan Ri , stoga takav ne postoji.

Po pitanju turbulentnosti i kritičnosti strujanja, jednostavnije je konvektivno gibanje. Budući da su konvektivni vrtlozi toliko dominantna struktura u strujanju, relativno je jednostavno napraviti skaliranje strujanja jer su svi ostali efekti puno manji od spomenutih dominantnih konvektivnih vrtloga koji imaju karakterističnu veličinu usporedivu s dubinom planetarnog graničnog sloja (PBL). Onda se zna da u tipičnom konvektivnom PBL-u visine npr. $h \sim 1.5$ km, karakteristične turbulentne brzine $u^* \sim 0.5$ m/s dominantni vrtlog traje oko $T \sim h/u^* \sim 1500/0.5$ s ~ 1 h ili malo

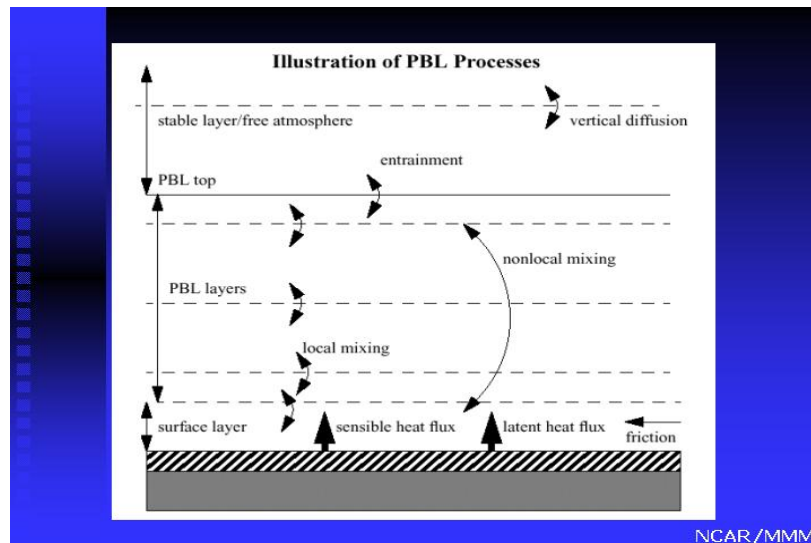
manje. U stabilno stratificiranoj turbulenciji mogu postojati različiti procesi koji se nadmeću za izvore i ponore turbulencije, njezin transport i unutrašnju organizaciju; tada mogu postojati različiti lokalni i nelokalni procesi zajedno. Ilustracija razvoja PBL-a je prikazana na Slici 10.1. Korišten je Ri iz numeričkog prognostičkog modela Aladin kao pokazatelj visinsko-vremenskog kvazi-periodičnog ljetnog PBL-a nad Zagrebom (Jeričević i Grisogono 2006). Očito da je dnevni konvektivni PBL za više od red veličine dublji od noćnog stabilnog PBL-a. Kolaps nestabilnog dubokog dnevnog PBL-a je rapidan (kasni popodnevni sati), dok mu je početak umjereniji (u idealiziranim uvjetima dnevni konvektivni PBL raste kao $\sim t$, dopodne, zatim kao $\sim t^{1/2}$, stagnira u rano popodne i onda kolapsira).

Dakle Sl. 10.1, koja prikazuje višednevni razvoj ABL-a kako ga vidi numerički model Aladin, ako se pokuša zamisliti u prostoru, tj. da se x -os vremena zamijeni koordinatom, dolazi se do pojma internog graničnog sloja (engl. *'Internal Boundary Layer'*, IBL). Ovakvi se nerjetko javljaju uz obalu, tj. gdje postoje diskontinuiteti u osobinama podloge (grijanje i hlađenje, hrapavost, nagnutost, itd.). Još malo više o numeričkom modeliranju atmosferskog PBL-a, tj. ABL-a, biti će pred kraj ove skripte.



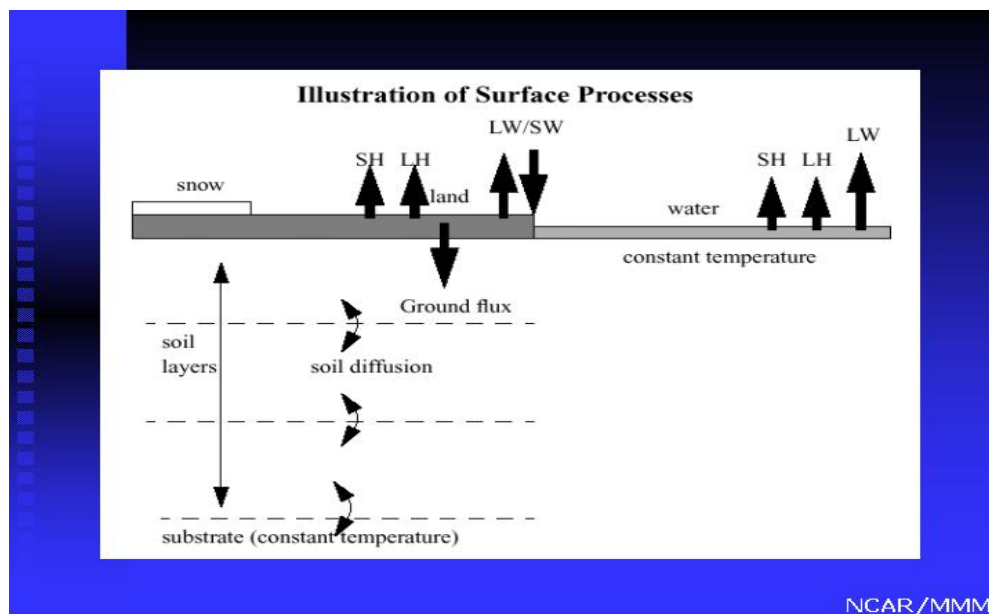
Slika 10.1. Dnevni hod tipičnog atmosferskog graničnog sloja. Integralni (*bulk*) $Ri(z,t)$ iz modela Aladin za 3 ljetna dana 2002. Pretpostavljeni kritični $Ri_c = 0.3$ je označen debelom crnom krivuljom i predstavlja procjenu visine PBL-a; druga crna krivulja iznad je $Ri_c = 1$. Diskontinuiteti u 24 h su posljedica reinicijalizacije modela.

Numerički prognostički modeli prezentiraju procese u PBL-u onoliko dobro koliko poznajemo činjenice o tom sloju. Na osnovi mjerenja, motrenja i teorije, definiraju se pripadne parametrizacije te se kodiraju u spomenute modele. Ilustracija toga je prikazana na Sl. 10.2 za atmosferu te na Sl. 10.3 za podlogu.



Slika 10.2 Pojednostavljeni prikaz nekih važnih procesa u PBL-u (Izvor: NCAR, internet).

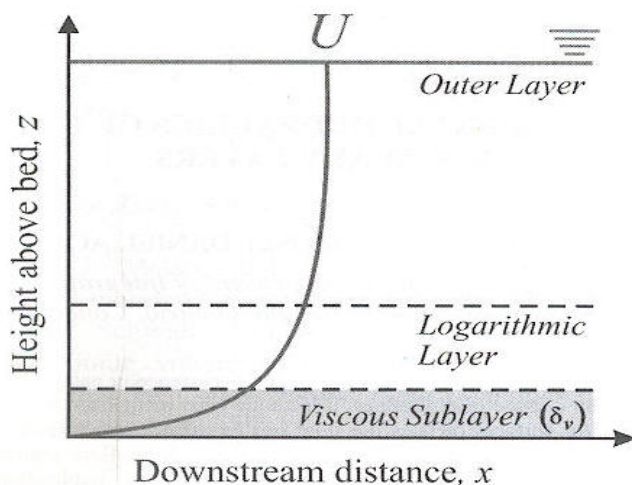
Pred kraj skripte bit će još nešto govora o numeričkom modeliranju PBL-a (ABL-a). Napomenimo da su za turbulentne procese u zraku od fundamentalnog značaja i procesi na podlozi. Informacije o stanju i procesima na podlozi prenose prvenstveno turbulentni tokovi u atmosferu. Na Sl. 10.3 su ilustrirani neki najbitniji procesi vezani direktno uz podlogu.



Slika 10.3 Prikaz najbitnijih procesa na podlozi i ispod nje (Izvor: NCAR, internet). Kratice su uobičajene: SH, LH, LW, SW redom znače senzibilni i latentni turbulentni tok topline, dugovalno i kratkovalno zračenje.

Prije nego nastavimo o stabilnosti PBL-a, pogledati ćemo što možemo naučiti od vrlo pojednostavljenog tretmana turbulencije. Načinit ćemo niz jakih pretpostavki za strujanje i

pripadnu turbulentnu strukturu. I za kraj ovog uvodnog poglavlja o atmosferskoj turbulenciji, skicirajmo na Slici 10.4 idealizirani profil približno neutralno stratificiranog PBL-a.



Slika 10.4 Idealizirani profil vjetra u atmosferskom graničnom sloju što se nalazi ispod slobodne atmosfere. Najniži tj. viskozni podsloj debljine δ_v najčešće nije bitan za meteorološko vrijeme. Iznad njega je približno logaritamski (prizemni) sloj, a iznad njega je nadeblji 'vanjski' sloj. Formalni opis ovog logaritamskog, ponekad zvanog internog ili Prandtlovog sloja je u idućem poglavlju, jedn. (14a).

Ponekad, ako se radi o npr. (sub)urbanom terenu, ili kompleksnoj vegetaciji, dodaje se barem još jedan geometrijski parametar iznad prizemne visine hrapavosti, taj se obično zove visina pomaka, d (*displacement height*). Nadalje, male do umjerene korekcije zbog statičke stabilnosti se relativno jednostavno unose u pripadne korekcije prizemnog logaritamskog profila vjetra i temperature pomoću tzv. univerzalnih funkcija sličnosti (vidi kasnije).

11. REYNOLDSOVO USREDNJAVANJE I PBL HORIZONTALNO HOMOGENE TURBULENCIJE

Prisjetimo se jednadžbi gibanja uz Boussinesqovu aproksimaciju⁶:

$$\begin{aligned}\frac{Dv}{Dt} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} - fu + F_{ry} \\ \frac{Du}{Dt} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + fv + F_{rx} \\ \frac{Dw}{Dt} &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + g \frac{\theta}{\theta_0} + F_{rz}\end{aligned}\quad (1)$$

gdje koristimo uobičajene oznake a zadnji članovi na desnoj strani su preostala eventualna ubrzanja ili kočenja (npr. zbog viskoznog trenja). Jednadžba termodinamike (adijabatička forma):

$$\frac{D\theta}{Dt} = -w \frac{d\theta_0}{dz} \quad (2)$$

i jednadžba kontinuiteta:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (3)$$

Nastavljamo ovim poznatim sustavom koji je nelinearan. Ne znamo ga eksplicitno riješiti jer je nelinearan i stoga uvodimo pojednostavljenja, ali ne i linearizaciju. Pretpostavljajući da postoji spektralna podjela, u stvari gotovo rasjep (tzv. ‘*spectral gap*’), između velike i male skale gibanja, uvodimo Reynoldsovo usrednjavanje. To je izuzetno važan pojam, povezujući statistički tretman s dinamičkom prirodom osnovnih jednadžbi.

REYNOLDSOVO USREDNJAVANJE

Objasnimo prvo zašto trebamo usrednjavati jednažbe sustava (1) do (3) i onda kako to činiti. U turbulentnom strujanju su vremenske fluktuacije polja brzine, potencijalne temperature, tlaka, itd. posljedica prolaska vrtloga različitih dimenzija kroz točke u kojima se npr. vrše mjerenja spomenutih varijabli. Vrtlozi su posljedica kontinuiranih nestabilnosti strujanja, npr. kao nepusredno nakon sasvim uvijenih pucajućih 3D valova. Kako bi ta mjerenja ipak vjerodostojno opisivala stanje na većoj skali (jer nas ne zanima svaki pojedini vrtlog, već njihovo ukupno djelovanje), potrebno je napraviti usrednjavanje strujanja na intervalu koji je dovoljno dug da „isključiti“ male sporadične vrtloge a istovremeno dovoljno kratak da zadrži eventualne trendove u polju promatrane veće skale (npr. (sub)mezoskala).

⁶ Boussinesqova aproksimacija predstavlja jedno od najvažnijih pojednostavljenja u dinamičkim jednadžbama primijenjenim na granični sloj, ukoliko – gustoća je zamijenjena konstantnom srednjom vrijednošću u svim članovima, osim u uzgonskom članu u jednadžbi vertikalnog gibanja. Pripadni detalji ove aproksimacije su suptilni i netrivialni, utječu na dinamiku i termodinamiku strujanja što mora biti dovoljno sporo da ne izazove zvučne valove i dovoljno plitko da poremećaj gustoće bude približno zanemariv.

Pretpostavlja se da se pojedina polja mogu rastaviti na sporo promjenjiva srednja polja i brzo varirajuće turbulentne komponente (velike perturbacije), tj. fluktuacije; npr.

$$w = \underbrace{\bar{w}}_{\text{srednjak}} + \underbrace{w'}_{\text{perturbacija}}$$

gdje srednjaci perturbacija po definiciji iščezavaju ($\overline{w'} = 0$); nadalje, $|\bar{w}| \sim |w'|$. Umnošci srednjaka i perturbacija također nestaju kad se primijeni usrednjavanje ($\overline{w'\bar{\theta}} = 0$). Stoga slijedi da je npr.

$$\Rightarrow \overline{w\theta} = \overline{(\bar{w} + w')(\bar{\theta} + \theta')} = \bar{w}\bar{\theta} + \overline{w'\theta'},$$

itd. za ostale kombinacije produkata polja. Još jednom, ovaj postupak je opravdan ako postoji spomenuti spektralni rascjep, a za kontinuirane spektre ga je teže ili čak nemoguće opravdati. Postoje i slučajevi 'između', tj. gdje se radi o procesima čiji srednjak ima očiti trend, superponirane valove i neku vrstu šuma ili slučajne fluktuacije. Tada su obrade takvih signala kompleksnije, kao i njihovo analitičko i numeričko modeliranje. Uočimo da ovdje ne vrijedi linearizacija.

Obrada ovakvih izmjerenih signala nije jednostavna, pogotovo kad se radi o vektorskim veličinama. Potrebno je voditi brigu o maksimalnoj čestini ulaznih podataka, tj. uzorkovanju; to se odražava na tzv. 'aliasing' frekvenciju i eventualno filtriranje podataka. Zatim, valja otkloniti eventualni trend, itd. Teoriji turbulencije geofizičkih fluida se općenito može prići s aspekta statističke obrade geofizičkih signala.

Primjena Reynoldsovog usrednjavanja na jednadžbe gibanja, termodinamike i kontinuiteta

Lijevi (nelinearni) član prve jednadžbe (1) raspisuje se uz pomoć jednadžbe (3) i pravila lančanog deriviranja :

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + u \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} + \frac{\partial uw}{\partial z}, \quad (4)$$

gdje su zadnja 3 člana napisana u tzv. „fluks formi“. Sva zavisna polja se potom rastavljaju na srednjake i perturbacije:

$$\frac{D(\bar{u} + u')}{Dt} = \frac{\partial(\bar{u} + u')}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{u} + u')^2 + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{u} + u')(\bar{v} + v') + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{u} + u')(\bar{w} + w').$$

Reynoldsovim usrednjavanjem, te zatim sređivanjem i grupiranjem dobije se:

$$\frac{D\bar{u}}{Dt} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}\bar{u} + \overline{u'u'}) + \frac{\partial}{\partial y}(\bar{u}\bar{v} + \overline{u'v'}) + \frac{\partial}{\partial z}(\bar{u}\bar{w} + \overline{u'w'}), \quad (5)$$

$$\frac{D\bar{u}}{Dt} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(\overline{u'u'}) + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}(\overline{u'v'}) + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}(\overline{u'w'}),$$

$$\frac{D\bar{u}}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}}_{\text{advekcija}} + \frac{\partial}{\partial x} (\overline{u'u'}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{u'v'}) + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{u'w'}).$$

Drugi član na desnoj strani iščezava radi zadovoljenja jednadžbe kontinuiteta. Prvi i treći član sjedinit će se sljedećom relacijom:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Jednadžba (5) postaje:

$$\frac{D\bar{u}}{Dt} = \frac{D\bar{u}}{Dt} + \frac{\partial}{\partial x} (\overline{u'u'}) + \frac{\partial}{\partial y} (\overline{u'v'}) + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{u'w'}), \quad (6)$$

Jednadžbe (1) - (3) sada pišemo u novom obliku:

$$\frac{D\bar{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + f\bar{v} - \left[\frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \right] + \bar{F}_{rx}, \quad (7)$$

$$\frac{D\bar{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - f\bar{u} - \left[\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z} \right] + \bar{F}_{ry}, \quad (8)$$

$$\frac{D\bar{w}}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + g \frac{\bar{\theta}}{\theta_0} - \left[\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'w'}}{\partial z} \right] + \bar{F}_{rz}, \quad (9)$$

$$\frac{D\bar{\theta}}{Dt} = -\bar{w} \frac{d\theta_0}{dz} - \left[\frac{\partial \overline{u'\theta'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'\theta'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'\theta'}}{\partial z} \right], \quad (10)$$

$$\left[\frac{\partial \overline{u'}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v'}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{w'}}{\partial z} \right] = 0. \quad (11)$$

Članovi u uglatim zagradama na desnim stranama od (7) do (10), su tzv. kovarijance i predstavljaju turbulentne tokove: $\overline{w'\theta'}$ je vertikalni turbulentni tok topline u kinematičkom obliku (tj. podijeljen s $\rho_0 C_p$), $\overline{w'u'}$ je vertikalni turbulentni tok zonalnog impulsa x-smjera, itd. U mnogim vrstama graničnog sloja su magnitude tih tokova istog reda veličine kao i ostali doprinosi dani u jednadžbama, te ih nije moguće zanemariti. Iznad graničnog sloja su, međutim, turbulentni tokovi često dovoljno mali da se članovi u svim uglatim zagradama gornjih jednadžbi zanemaruju. (Naravno, to ne smije biti slučaj ako npr. u srednjoj troposferi dolazi to pucanja uzgonskih valova, ili postoji duboka konvekcija, itd.)

Iako se broj nepoznatih srednjih polja (njih 5: $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, \bar{\theta}, \bar{p}$) podudara s brojem jednadžbi (7 – 11), one ne čine zatvorenu cjelinu (set). Turbulentni tokovi su također nepoznate veličine, te rješavanje jednadžbi zahtijeva postavljanje tzv. zatvarajućih pretpostavki (*engl. 'closure assumptions'*) kojima se nepoznati tokovi aproksimiraju pomoću različitih kombinacija poznatih

ili već prognoziranih polja. Jedno takvo pojednostavljenje dolazi od pretpostavke da su turbulentni tokovi horizontalno homogeni – na taj način horizontalne prostorne promjene ($\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$) postaju zanemarive u usporedbi s članovima koji uključuju vertikalno parcijalno diferenciranje.

ABL I HORIZONTALNO HOMOGENA TURBULENCIJA

Ovdje pretpostavljamo da se statističke osobine turbulencije ne mijenjaju niz x i y os (time je ispunjena i horizontalna izotropnost turbulencije). U ovom specijalnom slučaju horizontalno homogene turbulencije, iznad viskoznog sloja se mogu zanemariti molekularna viskoznost (preostali dijelovi posljednjih članova na desnoj strani u jednadžbama (7) do (9)), kao i horizontalne promjene turbulentnog toka (članovi u uglatim zagradama u jednadžbama (7) do (9)). Također, zbog jednostavnosti pretpostavljamo barotropnu turbulenciju.

Jednadžbe (7) i (8) tada postaju:

$$\frac{D\bar{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + f\bar{v} - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z}, \quad (12)$$

$$\frac{D\bar{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - f\bar{u} - \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z}. \quad (13)$$

Kako je ove jednadžbe za (\bar{u}, \bar{v}) moguće riješiti samo ako je poznata vertikalna raspodjela turbulentnog toka horizontalnog impulsa (što ovisi o strukturi turbulencije), ne postoji njihovo opće rješenje nego se koriste aproksimativne, ili semi-empiričke metode. Konkretno, za gibanja na sinoptičkoj skali je pokazano (u sklopu npr. kolegija Dinamička meteorologija II i III) da se akceleracijski član na lijevoj strani jednadžbi može ponekad zanemariti u usporedbi s članovima koji predstavljaju akceleraciju zbog Coriolisove sile i sile gradijenta tlaka. U slobodnoj atmosferi je rezultat takve jednostavne, npr. nulte (ili prve) aproksimacije geostrofička ravnoteža. Ako se pak donekle zadrži lijeva strana, ali tako da je dosta manja od 1. i 2. člana desne strane u (12) i (13), onda dolazimo do iduće, npr. prve (ili druge) aproksimacije na velikoj skali – kvazigeostrofička aproksimacija koja solidno tumači sinoptičke procese izvantropskih širina.

U stacionarnom barotropnom i horizontalno homogenom graničnom sloju je inercijska akceleracija i dalje relativno mala u usporedbi s onom zbog Coriolisove sile i sile gradijenta tlaka, tako sugeriraju mjerenja i modeli, ali se moraju uključiti i turbulentni tokovi. Stoga jednadžbe atmosferskog graničnog sloja opisuju ravnotežu triju glavnih doprinosa: Coriolisove sile, sile gradijenta tlaka i divergencije toka turbulentnog impulsa:

$$f(\bar{v} - v_g) - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} = 0, \quad (14)$$

$$-f(\bar{u} - u_g) - \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z} = 0, \quad (15)$$

s tim da je ispunjeno:

$$\vec{v}_g = \vec{k} \times \frac{1}{\rho f} \vec{\nabla} p$$

$$\vec{i} u_g + \vec{j} v_g = \vec{k} \times \frac{1}{\rho f} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k} \right)$$

$$(\rho f)(\vec{i} u_g + \vec{j} v_g) = \frac{\partial p}{\partial x} \vec{j} - \frac{\partial p}{\partial y} \vec{i}$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} = \rho_0 f \bar{v}_g$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} = -\rho_0 f \bar{u}_g$$

prema definiciji za geostrofički vjetar.

Sad uz najjednostavniji oblik tzv. K-teorije, modelirajući na vjerojatno najjednostavniji mogući način zadnje članove na lijevoj strani od (14) i (15), dolazimo do formulacije jednostavnog PBL-a koji vrijedi za idealiziranu atmosferu i more. Dakle, (14) i (15) predstavlja granični sloj barotropnog geofizičkog fluida uz statistički horizontalno homogenu turbulenciju. U tom je slučaju također pretpostavljeno da je pripadno turbulentno polje i statistički izotropno, tj. nema (ne)preferiranog smjera u horizontalnom razvoju turbulentnih vrtloga. Ovo će nas dovesti do pojma Ekmanovog graničnog sloja.

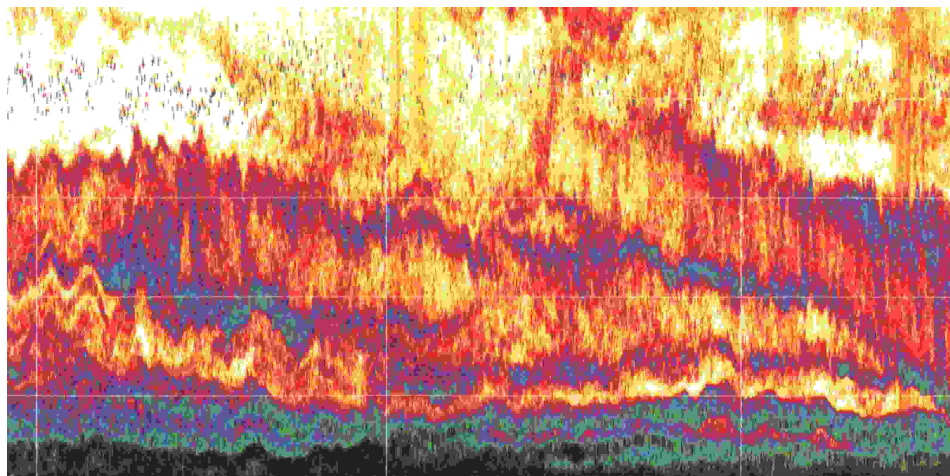
O mjerenjima u ABL-u

Mjerenja i motrenja u ABL-u su kompleksna i nadilaze u svojim zahtjevima i osobinama uobičajena sinoptička i klimatološka mjerenja i motrenja. Prvenstveno se radi o velikoj učestalosti uzorkovanja podataka u vremenu i po mogućnosti i u prostoru. In situ visokofrekventna mjerenja se obično vrše na tornjevima ili manjim avionima, dok se daljinska obavljaju sodarima, lidarima, profilerima vjetra, itd. Slika 11.1 prikazuje tipičan raspored triju britanskih sodara na Antarktiku; iz njihovih vremenskih nizova mogu se rekonstruirati 3D polja strujanja kao i neke značajne karakteristike turbulencije.



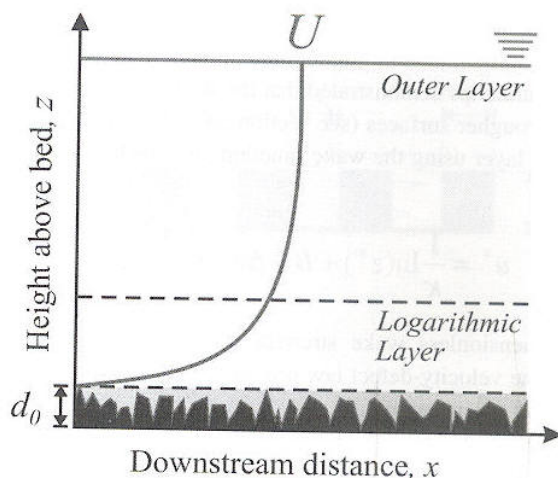
Slika 11.1 Sodari na Antarktiku. Tipičan im je domet između ~ 60 m i 1 km u visinu dajući npr. informacije u vjetru na svakih 20 do 30 m usrednjenih tokom 10-tak min (Izvor: internet).

Tipičan rezultat sodarskih mjerenja, koja u stvari daju informaciju o tzv. strukturnoj funkciji temperaturnih fluktuacija, je prikazan na Slici 11.2.



Slika 11.2. Analogni zapis sodarskog odziva prikazuje razvoj stabilnog graničnog sloja (SABL) tokom ~ 2.5 h; sati su označeni tankim svjetlim vertikalnim prugama, dok su stotine metara označene horizontalnim svjetlim prugama (visina je 0 – 500 m). Uočavaju se kratki uzgonski valovi na nekoliko nivoa te spuštajuća intruzija u 2. i 3. satu. (Izvor: internet).

Postaje očito da slikoviti i jako pojednostavljen prikaz PBL-a s kraja prošlog poglavlja, treba postupno dopunjavati jer se npr. karakter podloge ispod strujanja može skokovito mijenjati. Slika 11.3 ilustrira jednu moguću modifikaciju PBL-a zbog pokrovne strukture viskoznog podsloja.



Slika 11.3 Modifikacija pojednostavljenog prikaza PBL-a s kraja prošlog poglavlja. Ovdje je logaritamski prizemni sloj istisnut iznad značajnih neravnomjernih hrapavih elemenata. Formalni opis ovog sloja je u idućem poglavlju, jedn. (14b).

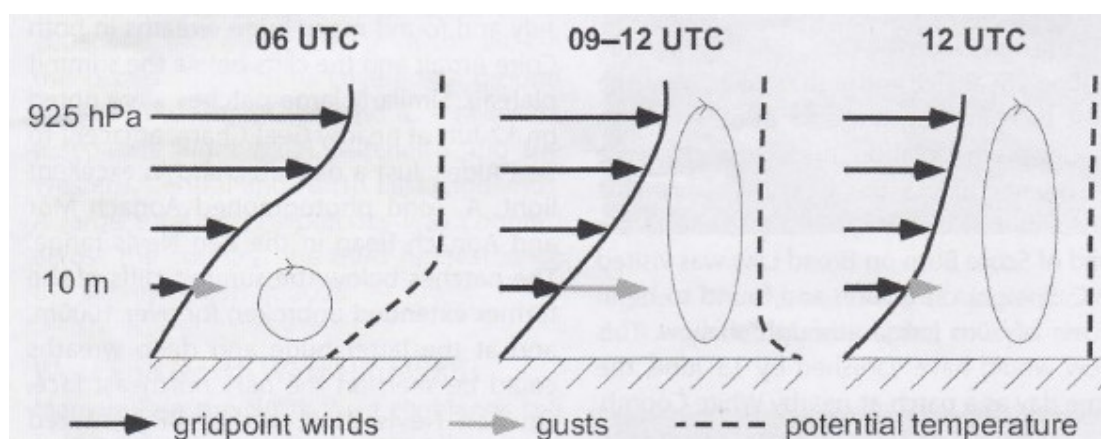
Jednostavnom skalnom analizom možemo pokušati procijeniti srednju visinu novonastalog internog graničnog sloja kao da ovaj započinje odozno lijevo na Sl. 11.3 i postupno raste u desno niz x -os. Pretpostavljajući ravnotežu između advektivnih (inercijskih) i viskoznih sila, kako se to uobičajeno čini u strojarskoj mehanici fluida, jednostavno se dolazi do odnosa $U^2/L \sim \nu U/\delta^2$, gdje

su U , L i δ karakteristična brzina strujanja, duljina i visina novonastalog sloja. Definirajući Reynoldsov broj kao $Re \equiv UL/\nu$, odmah slijedi da je $\delta \sim L/Re^{1/2}$, što znači da visina graničnog sloja raste s udaljenošću i obrnuto proporcionalno s 2. korijenom od Re . Nažalost, u meteorologiji nema puno koristi od ove procjene jer je Re jako velik u atmosferi, ponekad čak i proizvoljno velik. Drugim rječima, osnovno strujanje u ABL-u najčešće neovisi o Re ; dinamika ABL-a je uvelike određena velikim turbulentnim vrtlozima koji slabo osjećaju viskozne sile. Onda slijede progresivno manji vrtlozi koji kaskadiraju energiju s veće na manju skalu; tek najmanji turbulentni vrtlozi direktno i jako osjećaju viskoznost jer njihov Re postaje dovoljno mali (\sim dimenzija vrtloga).

Još jednom: zašto možemo reći da u dobroj aproksimaciji strujanje u razvijenom ABL-u neovisi o Re ? Evo dinamičke analogije s Rossbyjevim brojem, Ro . Kada je strujanje ~ 10 m/s na dovoljno maloj prostornoj i kratkoj vremenskoj skali, recimo 2 do 10 km u trajanju do 1 h, onda je razumno zanemariti utjecaj Coriolisove sile na to gibanje, tj. približno $f \rightarrow 0$. To ujedno znači da $Ro \rightarrow \infty$ u takvom modelu, slično kao i Re u prethodnoj analizi. Drugim rječima, pripadne sile postaju praktički irelevantne za osnovnu promatranu dinamiku.

Idealizirani profili u atmosferskom graničnom sloju

Iduća skica, Sl. 11.4 prikazuje tipičan razvoj vertikalnih profila bitnih vertikalnih meteoroloških veličina. Sve prikazane veličine bi trebale biti same po sebi objašnjive.



Slika 11.4 Ilustracija profila vjetrova, potencijalne temperature i veličine dominantnih turbulentnih vrtloga u uobičajenom atmosferskom graničnom sloju tijekom dana (preuzeto od Knippertz, 2008).

12. K-TEORIJA , DULJINA MIJEŠANJA, EKMANOV SLOJ.

U neutralnom i stabilnom ABL-u brzina i smjer vjetra značajno variraju sa visinom. (U konvektivnom ABL-u, zbog izmješanosti zraka u kvazi-stacionarnom slučaju, npr. u rano poslijepodne, osim pri dnu i vrhu ABL-a, male su vertikalne promjene vjetra, potencijalne temperature, specifične vlažnosti i primjesa). Da bi se dobio zatvoreni sustav jednadžbi već i za horizontalno homogeni i stacionarni ABL, potrebno je u pripadnoj teoriji turbulencije načiniti određeni set pretpostavki o vertikalnim turbulentnim tokovima. Tradicionalni pristup ovom problemu zatvaranja je pretpostavka da se turbulentni vrtlozi ponašaju kvalitativno slično molekularnoj difuziji, ali su koeficijenti razmjene ovdje nekoliko redova veličina veći nego pri molekularnoj difuziji, tako da je perturbacija proporcionalna srednjem stanju. Ovo vodi na K-teoriju, što je veliko praktično pojednostavljenje (koje nerjetko ne vrijedi za turbulentna gibanja!).

Jednadžbe za turbulentni tok su iste kao i na kraju prošle lekcije, osim što više ne pišemo znak za prosjek zbog Reynoldsovog usrednjavanja iznad komponenti vjetra (u , v):

$$\begin{aligned} f(v - v_g) - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} &= 0 \\ -f(u - u_g) - \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z} &= 0 \end{aligned}, \quad (1)$$

a u ovim jednadžbama se turbulentni tok može pisati kao:

$$\begin{aligned} \overline{u'w'} &= -K_m \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right) \\ \overline{v'w'} &= -K_m \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) \end{aligned}; \quad (2)$$

dok za tok potencijalne temperature možemo pretpostaviti da vrijedi (za kasniji prijelaz na baroklinu turbulenciju):

$$\overline{\theta'w'} = -K_h \left(\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \right), \quad (3)$$

gdje je

$K_m [m^2 s^{-1}]$ koeficijent vrtložne difuzivnosti (turbulentna difuzivnost),

$K_h [m^2 s^{-1}]$ koeficijent turbulentne difuzivnosti topline (vrtložna termalna difuzivnost).

Ova shema zatvaranja (2), (3) jednadžbi graničnog sloja (1) se naziva K-teorija. Za razliku od koeficijenata molekularne viskoznosti (za zrak $1.56 \cdot 10^{-5} m^2 s^{-1}$), vrtložne difuzivnosti (*eddy viscosity*) ovise o strujanju (između $\sim 10^{-4}$ do $2000 m^2 s^{-1}$), a ne o fizikalnim svojstvima fluida i moraju se odrediti empirijski ili izračunati iz nekog sofisticiranijeg modela (koji pak opet mora imati neke pretpostavke o tzv. zatvaranju višeg reda). Najjednostavniji modeli pretpostavljaju da je koeficijent turbulentne izmjene konstantan kroz strujanje; to eventualno vrijedi za difuziju na maloj skali u slobodnoj atmosferi (no aproksimacija nije dobra za granični sloj gdje su skale i intenziteti jako ovisni o udaljenosti od površine kao i o statičkoj stabilnosti i 3D smicanju).

Neka djelomična poboljšanja ove K-teorije uvode ovisnost K o lokalnom Richardsonovom broju (smanjenje K s porastom Ri). Dalje modifikacije uključuju nelokalne korekcije zadanog vertikalnog K-profila o npr. visini inverzije i površinskom turbulentnom toku topline.

Bit K-teorije, tj. hipoteze o turbulentnoj viskoznosti, jest postojanje proporcionalnosti između neizotropnih članova Reynoldsovog tenzora napetosti strujanja i gradijenata pojedinih komponenti pripadnog srednjeg (osnovnog) strujanja. Osmotreno je da je ova hipoteza prilično razumna i dobra za neka jednostavna strujanja sa smicanjem osnovne struje. Ipak, fizika turbulencije je bitno različita od fizike molekularnih procesa koja nas navodi na zakon viskozne napetosti. Konkretno, u tipičnim laminarnim strujanjima sa smicanjem, molekulska vremenska skala (zadana srednjom brzinom molekula i pripadnim srednjim slobodnim putem) je više redova veličina manja od vremenske skale srednjeg smicanja, $\mathcal{S}^{-1} = (|\langle \partial U_i / \partial x_j \rangle|)^{-1}$; stoga se molekulsko gibanje rapidno brzo prilagođava nametnutom smicanju i solidno je opisano K-teorijom 1. reda. Suprotno tome, turbulentna smicajuća strujanja imaju svoju tipičnu vremensku skalu, $\tau = TKE/\varepsilon$, općenito usporedivu s vremenskom skalom srednjeg smicanja, ili veću. Na primjer, u eksperimentima s jednostavnim kružnim mlazovima fluida pripadni omjer relevantnih vremenskih skala je $\tau\mathcal{S} \approx 3$, za homogeno smicajuće strujanje je oko 6; dok u turbulenciji podvrgnutoj jakoj distorziji (npr. strujanje oko zgrada i mostova) može biti veći čak za nekoliko redova veličina. Tada K-teorija 1. reda uopće ne vrijedi.

HIPOTEZA O DULJINI MIJEŠANJA

Najjednostavniji pristup određivanju modela za koeficijent vrtložne difuzivnosti u graničnom sloju je baziran na hipotezi o duljini miješanja; koristit ćemo i primitivnu, tj. običnu K-teoriju 1. reda. Ova hipoteza pretpostavlja da čest fluida pomaknuta vertikalno zadržava srednja svojstva svojeg prvobitnog nivoa do karakteristične udaljenosti ξ' i tada se miješa sa okolišem; očito je da se radi o analogiji iz molekulske fizike o slobodnom putu molekule ('*mean free path*'). Ovaj pomak je preduvjet za stvaranje turbulentnih strujanja čije magnitude ovise o ξ' i o gradijentu srednjeg svojstva:

$$\begin{aligned}\theta' &= -\xi' \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \\ u' &= -\xi' \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \\ v' &= -\xi' \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\end{aligned}\tag{4}$$

gdje je pomak $\xi' < 0$ za spuštanje česti $\xi' > 0$ za dizanje česti. Za konzervativnu veličinu u nekondenzirajućim procesima, kao što je potencijalna temperatura, ova hipoteza je primjerena pod uvjetom da su skale vrtloga male u usporedbi sa srednjim strujanjem, ili da je srednji gradijent konstantan sa visinom. Hipoteza je manje vjerodostojna u slučaju brzine jer sile gradijenta tlaka mogu izazvati bitne promjene u brzini tijekom pomaka i razvoja vrtloga. Primjenjujući hipotezu o duljini miješanja vertikalni turbulentni tok horizontalnog impulsa i potencijalne temperature se može zapisati kao:

$$\begin{aligned}
-\overline{u'w'} &= \overline{w'\xi'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \\
-\overline{v'w'} &= \overline{w'\xi'} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \\
-\overline{\theta'w'} &= \overline{w'\xi'} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}
\end{aligned} \tag{5}$$

gdje je iskorištena spomenuta analogija za vertikalne pomake. S ciljem da se izluči w' u ovisnosti o srednjim poljima, pretpostavljamo da je vertikalna stabilnost atmosfere dovoljno blizu neutralnoj tako da je utjecaj uzgona mali (kasnije ćemo funkcijama sličnosti uvažiti pripadne uzgonske modifikacije). Horizontalna skala vrtloga mora biti usporediva s vertikalnom skalom gibanja (netrivijalna usporedivost za velike vrtloge) tako da vrijedi proporcionalnost $|w'| \propto |\mathbf{V}'|$, stoga vrijedi:

$$w' \approx \xi' \left| \frac{\partial \bar{\mathbf{V}}}{\partial z} \right|, \tag{6}$$

gdje je \mathbf{V}' turbulentni dio horizontalnog polja brzine, $\bar{\mathbf{V}}$ je srednjak horizontalnog polja brzine, $|\bar{\mathbf{V}}| = (\bar{u}^2 + \bar{v}^2)^{1/2}$ te analogno za \mathbf{V}' . Apsolutna vrijednost gradijenta srednjaka horizontalne brzine je potrebna jer ako je $\xi' > 0$ tada je $w' > 0$. Stoga se turbulentni tok može aproksimirati kao:

$$\begin{aligned}
-\overline{u'w'} &= \overline{\xi'^2} \left| \frac{\partial \bar{\mathbf{V}}}{\partial z} \right| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}, \\
&= K_m \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}
\end{aligned} \tag{7}$$

gdje je vrtložna viskoznost definirana kao:

$$\begin{aligned}
K_m &= \overline{\xi'^2} \left| \frac{\partial \bar{\mathbf{V}}}{\partial z} \right| \\
&= l^2 \left| \frac{\partial \bar{\mathbf{V}}}{\partial z} \right|,
\end{aligned} \tag{8}$$

gdje je prvi faktor na desnoj strani od (8) kvadrat karakteristične duljine miješanja. (Zadavajući turbulentni Pr , određen je i K_h .) Neke od tek spomenutih modifikacija K-teorije uključuju u (8) dodatni faktor množenjem desne strane nekom zadanom funkcijom lokalnog Richardsonovog gradijentnog broja Ri ; ove funkcije, nazovimo ih f_m i f_h , su jednake jedinici za $Ri = 0$, blago rastu za $Ri < 0$, a jače opadaju za $Ri > 0$. Napomenimo da je moguće i drugačije definirati vrtložnu difuzivnost, npr. kao $|\mathbf{LV}|$ gdje su L i \mathbf{V} karakteristična duljina miješanja i brzina.

Duljina miješanja:

Iz (8) slijedi

$$l \equiv \left(\frac{\overline{\xi'^2}}{\xi'^2} \right)^{1/2}. \tag{9}$$

Dakle, ova karakteristična duljina miješanja je korijen srednjeg kvadrata vertikalnog pomaka česti, što je mjera srednje veličine vrtloga (veći vrtlozi i uvjetno veća smicanja, tj. ona koja idu kroz deblji sloj zraka, induciraju jače turbulentno miješanje). Ova duljina (9), koja se pojavila i u (8), je 'vrlo rastezljiv' pojam, i mada teorijsko-modelarski primamljiv koncept, prilično je varljiv i nemjerljiv.

OSNOVNE VRSTE ABL-a

a) Ekmanov sloj

Teorija ovakvog sloja je već bila proučavana u prethodnim kursevima. Ako se upotrijebi jednostavna barotropna teorija tokova (bez toplinskog transporta) i gradijenata te se uzme da je K_m konstantan (zbog matematičke jednostavnosti i fizikalne zornosti), dobivamo jednadžbe klasičnog Ekmanovog sloja:

$$\begin{aligned} K_m \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + f(v - v_g) &= 0 \\ K_m \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - f(u - u_g) &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

gdje su donji rubni uvjeti $u = 0, v = 0$ na $z = 0$, te gornji rubni uvjeti: $u \rightarrow u_g, v \rightarrow v_g$ kad $z \rightarrow \infty$. Drugu od jednadžbi (10) množimo s i i zbrajanjem tih jednadžbi dobivamo:

$$K_m \frac{\partial^2 (u + iv)}{\partial z^2} - if(u + iv) = -if(u_g + iv_g). \quad (11a)$$

$$\frac{d^2[(u - u_g) + i(v - v_g)]}{dz^2} - \frac{if}{K_m} [(u - u_g) + i(v - v_g)] = 0. \quad (11b)$$

Kako je (11) napisan u kompleksnom obliku, (10) ne daje jednadžbu 4. reda, već 2. reda (dakle, prikriiven je pravi red diferencijalne jedn. (11)). Radi pojednostavljenja postavljamo koordinatni sustav u smjeru geostrofičkog vjetra pa je $v_g = 0$. Opće rješenje za (11) je

$$(u + iv) = A \exp[(if / K_m)^{1/2} z] + B \exp[-(if / K_m)^{1/2} z] + u_g. \quad (12)$$

Primjenjujući spomenute rubne uvjete i relaciju $\sqrt{i} = (1 + i) / \sqrt{2}$, te Eulerov izraz za eksponencijalne kompleksne brojeve, dobivamo za sjevernu hemisferu:

$$\begin{aligned} u &= u_g (1 - e^{-\gamma z} \cos \gamma z) \\ v &= u_g e^{-\gamma z} \sin \gamma z \end{aligned}, \quad (13a)$$

gdje $\gamma \equiv (f / 2K_m)^{1/2}$ igra ulogu karakterističnog vertikalnog valnog broja čiji je recipročni iznos proporcionalan debljini Ekmanovog sloja H . Taj sloj je prvo otkriven u moru. Za mali argument, tj. malu visinu, (13) daje strujanje pod 45° N, tj. prema sjeveroistoku pri tlu koje onda visinom raste u magnitudi i zakreće k istoku, tj. 90° N i dalje k jugu, kao spirala. Dakle, za (10) rješenje je (13), Ekmanova spirala. To je direktan rezultat ravnoteže triju sila: sile gradijenta tlaka, Coriolisove sile, i (pojednostavljenog) turbulentnog otpora (trenja). Izraz (13) prikazuje

barotropno strujanje kao vertikalno prigušenu oscilaciju što se spušta odozgo od 'vrha' geostrofičkog vjetra k nuli na dnu atmosfere. Poopćenje (13a) gdje $(u_g, v_g) \neq (0,0)$ je

$$\begin{aligned} u &= u_g - e^{-\gamma z} (u_g \cos \gamma z + v_g \sin \gamma z) \\ v &= v_g + e^{-\gamma z} (u_g \sin \gamma z - v_g \cos \gamma z) \end{aligned} \quad (13b)$$

Ekmanov sloj se u atmosferi rijetko primjećuje u ovako jednostavnom obliku (13). To je uglavnom stoga što turbulentni tok nije jednostavno proporcionalan vertikalnim gradijentima srednjaka vjetra, obično postoji i vertikalni tok topline, te djelomično jer je K_m jako promjenjiv blizu površine. Vertikalno umjereno varirajući (tj. ne prebrzo mijenjajući), općenitiji $K_m(z)$ za Ekmanov sloj je riješen WKB(J) metodom u Grisogono (1995); Berger i Grisogono (1998) su na osnovi avionskih mjerenja pokazali da sličan gotovo neutralan sloj može ponekad postojati nad morem i da $K(z)$ prikazuje izmjerene vertikalne profile vjetra i turbulentnih tokova bolje nego $K=const$.

Poznavajući bit WKB(J) aproksimacije isprobanu na jednadžbi oscilatora za amplitudu vertikalne brzine (TGE), možemo odmah napisati WKB nultog reda za poopćenje rješenja (13a). Pri tome γz prelazi u integral, kao što je u TGE $m(z)z$ prešlo u pripadni integral $\int m(z)dz$. Dakle,

$$\begin{aligned} u &= u_g (1 - e^{-I(z)} \cos(I(z))) \\ v &= u_g e^{-I(z)} \sin(I(z)) \end{aligned} \quad (13c)$$

gdje je

$$I(z) \equiv \left(\frac{f}{2}\right)^{1/2} \int_0^z \frac{dz}{K(z)^{1/2}}. \quad (13d)$$

Više o samome rješenju i usporedbi s drugim rezultatima je u Grisogono (2011). Ovom zadnjom relacijom (13c, d) se može bolje procijeniti kut između prizemnog vjetra, na maloj visini z_S , i geostrofičkog vjetra, nego što se dobije limesom visine u nulu za omjer v/u uz $K=const$. Mada rijetko kada i gdje realan, prvenstveno zbog svoje nestabilnosti obzirom na male perturbacije, Ekmanov sloj se ponekad koristi u teorijskim studijama strujanja na velikoj skali kao jedan od načina tretiranja pridnenog trenja (npr. Pedlosky 1987). Eventualna važnost tog sloja, npr. pri pojednostavljenju osnovnih jednadžbi, može se procijeniti iznosom Ekmanovog broja, $K_m/(fH^2)$. Nadalje, geostrofički vjetar se nerjetko mijenja visinom, time termalni vjetar direktno utječe na Ekmanov sloj. Ipak, taj model Ekmana važan je u teorijskim proučavanjima i provjeri numeričkih modela. Nedavno poopćenje Ekmanovog sloja nalazi se u Constantinu i Johnsonu (2019).

Zbog prizemnog strujanja od visokog k niskom tlaku, što postupno skreće ka geostrofičkom vjetru pri vrhu Ekmanovog sloja, ovaj je proces važan za popunjavanje i djelomično usporavanje ciklona. Zanimljivo je da vertikalno integrirani tok preko izobara, tj. integracija gornje jedn. (10), od višeg k nižem tlaku, direktno ovisi o prizemnoj turbulentnoj napetosti niz x -os. Množeći taj tok s gustoćom, dobija se tok mase od visokog k niskom tlaku, tj. možemo tako procijeniti popunjavanje neke idealizirane ciklone. Nadalje, poznavajući prizemni turbulentni tok impulsa ($\sim u^{*2}$, gdje je u^* procjena tzv. turbulentne brzine trenja) i prosječnu y -komponentu strujanja, $\langle v \rangle$, može se jednoznačno procijeniti visina Ekmanovog sloja (i obrnuto). Također, znajući da je za predloženi slučaj geostrofička komponenta vertikalne vrtložnosti jednaka $-\partial u_g / \partial y$, te koristeći nestlačivi oblik jednadžbe kontinuiteta, može se procijeniti vertikalna brzina u Ekmanovom sloju, kao i tipično trajanje popunjavanja neke ciklone.

Zanimljivo je da se slabo-do-umjereno stabilni granični slojevi ipak mogu ponekad tretirati kao da su odozdo (o)hlađeni Ekmanovi slojevi (npr. Zilitinkevich i sur. 2002; Svensson i Holtslag, 2009).

To je vjerojatno zato što su u takvim slojevima relativno mala odstupanja od neutralnosti, za razliku od jako stabilnih graničnih slojeva gdje to više ne vrijedi (vidi kasnije lekcije). Donekle slično, i jednostavan konvektivni granični sloj se može proučavati kao početno Ekmanov sloj zagrijavan odozdo. Ekmanov sloj se u moru ponekad pojavljuje 2 puta po visini: odmah ispod površine mora (klasičan slučaj), te blaži, odnosno skromniji (slabiji) na dnu mora (Kundu i Cohen, 2002).

b) Prizemni sloj

Debljina prizemnog (površinskog) sloja ovisi o statičkoj stabilnosti, obično je plići od 10% ukupne visine graničnog sloja. U potpunosti je održavan samo vertikalnim prijenosom impulsa preko turbulentnih vrtloga, ne ovisi direktno o Coriolisovoj sili niti o sili gradijenta tlaka. Analiza se bazira na pretpostavci da je vjetar pri površini paralelan x -osi i da je strujanje stacionarno; onda slijedi (koristeći međukorak (8)):

$$0 = -\frac{1}{\rho_0} \partial_x p - \partial_z \overline{(u'w')}$$

$$\nabla p_h \approx 0$$

$$\partial_z \overline{(u'w')} \approx 0 \Rightarrow \partial_z (K_m \partial_z \bar{u}) = 0$$

$$K_m \partial_z \bar{u} = konst$$

$$\partial_z \bar{u} = \frac{u_*}{kz}; K_m \propto l^2 |\partial_z \bar{u}|, l \approx kz$$

$$K_m = (kz)^2 \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right|$$

$$K_m \approx ku_* z,$$

$$u(z) = \int_{z_0}^z \frac{u_*}{kz} dz$$

$$u(z) = \frac{u_*}{k} \ln \left(\frac{z}{z_0} \right) \quad (14a)$$

gdje su:

u_* brzina trenja (karakteristička skala turbulentne brzine, obično između ~ 0.1 i 1 m/s),

z_0 ($z \geq z_0$) visina hrapavosti (jako varira, od npr. < 0.1 mm nad mirnim morem pa preko 1 m u urbanim sredinama); to je objektivna osobina dinamičke interakcije strujanja i podloge pa prirodno ovisi o nepravilnostima pripadne podloge,

$k \approx 0.4$ von Karmanova konstanta.

Za slučajeve kad postoji dodatni interni sloj između visine hrapavosti i samog logaritamskog prizemnog sloja, npr. u šumi ili među blisko postavljenim zgradama i drvećem (eng. 'canopy sub-layer'), Sl. 11.3, logaritamski prizemni sloj se ekstrapolira iznad spomenutog internog sloja debljine d kao

$$u(z) = \frac{u_*}{k} \ln \left(\frac{z+d}{z_0} \right). \quad (14b)$$

Da je u (14a) u brojniku logaritma stajalo $z + z_0$, $z \geq 0$, onda bi to samo značilo da u (14b) $z_0 \rightarrow d$. Profil vjetra u stacionarnom neutralnom prizemnom sloju (14) je logaritamski i to se prilično dobro slaže s mjerenjima u prirodi. Pri malom do umjerenom odstupanju od neutralnosti, gornji $u(z)$ se modificira efektima uzgona i tada obično vrijedi da je

$$u(z) \approx \frac{u_*}{k} \left\{ \ln \left(\frac{z}{z_0} \right) + \psi_m(z/L) \right\}, \quad (15a)$$

$$\theta(z) \approx \frac{\Theta_*}{k} \left\{ \ln \left(\frac{z}{z_0} \right) + \psi_h(z/L) \right\}, \quad (15b)$$

gdje je θ_* karakteristična skala turbulentnih fluktuacija potencijalne temperature (= 0 u neutralnoj stratifikaciji), $\psi_m(z/L)$ i $\psi_h(z/L)$ su bezdimenzijske, univerzalne 'psi-funkcije' sličnosti koje korigiraju logaritamske fluks-profile (14) u (15) uvažavajući prizemnu stratifikaciju (tj. uzgon), dok je L tzv. Obukhovljeva duljina koju ćemo uskoro detaljnije obraditi; L mjeri mehaničke i termalne doprinose efektivnoj duljini dominantnih turbulentnih vrtloga, njome se skalira prizemno horizontalno strujanje i pripadni površinski turbulentni tokovi. Primijetimo da $L \rightarrow \pm\infty$ u neutralnoj stratifikaciji pa su onda 'psi-funkcije' jednake nuli. Produkt $u_*\theta_*$ definira vertikalni turbulentni tok temperature, tj. $-\overline{\theta'w'}$. Slično bi se izvodila i relacija za specifičnu vlažnost kao i za (15b), odnosno za tok fluktuirajuće koncentracije $\overline{c'w'}$ gdje bi u polaznoj jedn. za razvoj srednje koncentracije C trebalo uzeti u obzir pripadnu advekciju te izvore i ponore. Za stabilni prizemni sloj $\psi_m(z/L)$ je, prema mjerenjima, linearna funkcija visine, otprilike $4.7z/L$, a slično vrijedi i za vertikalni tok temperature; za nestabilni prizemni sloj, funkcije sličnosti su kompliciranije, transcendentne funkcije visine i L , ali su isto poznate. U prizemnom sloju obično postoji značajna neizotropija turbulencije (zbog blizine 'zida' tj. podloge), kao i zakretanje vjetra po visini.

Ponekad se umjesto logaritamskog zakona za vertikalne profile prizemnog sloja, (14) i (15), koristi eksperimentalno provjeren razlomljeno-potencijski zakon ovisnosti iznosa brzine o visini iznad podloge, tipa

$$u(z) = u_{REF} \left(\frac{z}{z_{REF}} \right)^\alpha,$$

gdje je $0 < \alpha < 0.5$, $\alpha \sim 1/7$ (aproksimirajući logaritamsko ponašanje, ili malo preciznije $0.14 \leq \alpha \leq 0.4$) dok su z i z_{REF} unutar tog prizemnog sloja. Koristeći nešto drugačiju formu od (14), prethodni se izraz za omjer brzine na dva nivoa može i izvesti.

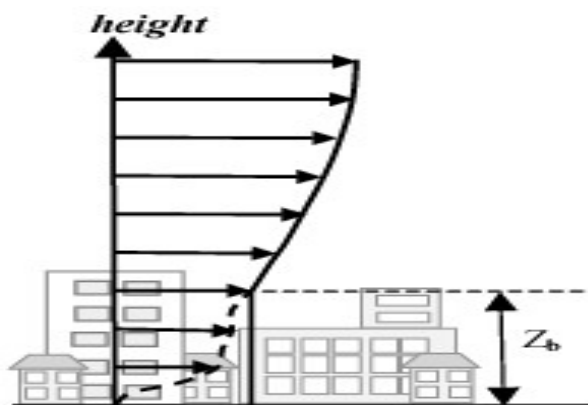
Napomenimo da se na osnovi navedenog Prandtlvog potencijskog zakona za vjetar, koji u principu može vrijedjeti samo u skoro statički neutralnim uvjetima, može ponekad uspješno procijeniti vjetar i iznad prizemnog sloja (Prof. Hrvoje Kozmar, FSB Zagreb, privatna korespondencija). Nadalje, uz uobičajenu pretpostavku $\langle u'w' \rangle = -K(z)dU/dz$, ($\langle u'w' \rangle$ je funkcija visine) i navedeni potencijski zakon između iznosa brzine i pripadne visine, može se direktno pokazati da vrijedi $K(z) = -z \langle u'w' \rangle / [\alpha U]$. Dakle, može se formirati procjena vrtložne difuzivnosti $K(z)$ na osnovi flukseva i srednjeg vjetra.

Primjetite u (15) raspored argumenata: z_0 , z , L ; te visine određuju srednje stanje prizemnog vjetra i temperature do na dinamičku (ovdje turbulentnu) skalu. Mogu se dodati ostale relevantne modifikacije u (15), poput utjecaja stabilnosti slobodne atmosfere kao u npr. Zilitinkevich i Calanca (2000). Na primjer, kad se konvektivni sloj slobodno proteže do inverzije, onda još i ta

visina inverzije, skupa sa z_0 , z , L , određuje 'geometriju' srednjeg stanja – naravno, opet do na parametar turbulentne skale za brzinu i temperaturu. Nažalost, teorija sličnosti ne vrijedi uvijek u prizemnom sloju; npr. ne vrijedi u jako stabilno-stratificiranim uvjetima. Donekle se može reći i za urbani granični sloj, no u takvim su slučajevima moguće prikladne dopunske modifikacije relacija (15).

Poznavajući zemljopisnu širinu strujanja u približno neutralnom graničnom sloju (informacija velike skale gibanja), s jedne strane, te brzinu trenja, tj. u^* , s druge strane (informacija male skale gibanja), može se procijeniti dubina, odnosno visina pripadnog graničnog sloja kao $h \approx \text{const } u^*/f$, gdje je tipično $\text{const} \leq 0.4$. Nadalje, očekujući da je vrtložna difuzivnost linearna funkcija visine u pripadnom prizemnom sloju, tj. $K(z) \approx u^*kz$, te ako K postize svoju srednju vrijednost K_m za cijeli pripadni neutralni sloj nešto iznad vrha prizemnog sloja, z_s , koji je otprilike 10 % debljine h ; na ovoj visini se u prosjeku turbulentni vertikalni tokovi ne bi smjeli mijenjati više od, recimo, $\pm 20\%$ pripadne referentne (srednje) vrijednosti. Ako je doista tako, onda se spomenuta procjena same visine h dobro slaže s procjenom iste na osnovi Ekmanovog profila vjetra, npr. $h \approx \pi(2K_m/f)^{1/2}$.

Visina prizemnog sloja ima drugačiju ovisnost u gradovima nego u ruralnim krajevima; tada govorimo o tzv. urbanom (prizemnom i onda cijelom graničnom) sloju. Na sl. 12.1 skiciran je vertikalni profil srednjeg vjetra u urbanom graničnom sloju. Kvalitativno sličan prizemni sloj se pojavljuje i u šumsko-agrarnim krajevima ('canopy layer').



Slika 12.1. Ilustracija vertikalnog profila srednjeg vjetra u i iznad urbanog prizemnog sloja karakteristične debljine Z_b (tipično $Z_b \approx d$).

c) Kut vjetra u Ekmanovom sloju

Nakon uvođenja prizemnog sloja u ovom potpoglavlju b), vratimo se kratko na Ekmanov sloj iz potpoglavlja a) i obratimo pažnju na kut α između prizemnog i geostrofičkog vjetra koristeći jedn. (1).

$$f(v - v_g) - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} = 0$$

$$- f(u - u_g) - \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z} = 0$$

gdje sve oznake imaju uobičajena značenja. Zbog jednostavnosti opet pretpostavimo da geostrofički vjetar puše niz x -os. Integriramo 1. jedn. od dna do vrha ABL-a debljine H , iskoristimo teorem o srednjoj vrijednosti za brzinu v kroz cijelu dubinu H , iskoristimo činjenicu da turbulentni tokovi trnu na vrhu ABL-a (u praksi se nerjetko pretpostavlja da je dovoljno da ovi

tokovi budu manji od 5 ili 10 % maksimalnih vrijednosti) i da je prizemni turbulentni tok dobro opisan brzinom trenja u_* . Dakle,

$$\bar{v}^H fH = -(-u_*^2 \cos(\alpha))$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\bar{v}^H f}{u_*^2} H,$$

odakle se odmah vidi da preduboko procijenjeni, ili modelirani ABL može imati premali kut α , što ima za posljedicu npr. preslabo popunjavanje ciklonalnih područja. Nerjetko je preveliki H ujedno povezan i s premalim \bar{v}^H pa onda možda i sam kut nije pogrešan, ali je opet preslab protok zraka k niskom tlaku jer je općenito premala komponenta brzine v . U zadnjem izrazu da je postojao $v_g \neq 0$, onda bi ta vrijednost bila prvo oduzeta od \bar{v}^H i onda pomnožena s preostalim faktorom fH/u_*^2 .

Sličnim integriranjem 2. relacije pojednostavljene jedn. gibanja u y -smjeru dolazimo do analognog izraza za kut, tj:

$$(\bar{u}^H - u_g) fH = -u_*^2 \sin(\alpha)$$

$$\sin(\alpha) = \frac{(u_g - \bar{u}^H) f}{u_*^2} H,$$

$$\tan(\alpha) = \frac{(u_g - \bar{u}^H)}{\bar{v}^H}.$$

Uz pretpostavku da je $f = 10^{-4}/s$, $\bar{v}^H = 3$ m/s, $H = 1$ km i $u_* = 0.6$ m/s, kut $\alpha = 33.5^\circ$. Očito je da su ove procjene kutova jako osjetljive na grube procjene ulaznih vrijednosti; fina međuigra između više parametara mora završiti u intervalu $-1 \leq \sin(\alpha) \leq 1$. Primjetimo da je u klasičnom slučaju Ekmanova sloja ovaj prizemni kut jednak 45° , jer je pripadni tangens jednak limesu omjera v/u kada z teži k nuli, što je u stvarnosti općenito prevelika vrijednost za taj kut. Obična K-teorija izjednačava gornju zadnju relaciju s $[\partial v/\partial z/\partial u/\partial z]_0$ što samo potvrđuje neadekvatnost K-teorije u finijim procjenama za atmosferski granični sloj.

Kad povećani doprinos velikih vrtloga vertikalnom turbulentnom toku s visinom točno kompenzira smanjeni pripadni doprinos malih vrtloga, onda je taj turbulentni tok konstantan visinom. To onda odgovara idealiziranom prizemnom sloju atmosfere.

d) Sličnost strujanja

Za dva strujanja govorimo da su slična ako postoji geometrijska i dinamička sličnost među njima. Geometrijska sličnost se odnosi na oblik i dimenzije tijela ili potprostora podvrgnutog strujanju: osnovne dužine moraju biti slične, tj. u razmjeru, dok kutevi moraju biti isti. Dinamička sličnost zahtjeva da strujanja imaju iste relevantne bezdimenzijske brojeve, npr. Ri , Fr , i Pr broj (te približno isti Re). Za kompletniji pristup skaliranju turbulentnih tokova treba uvesti tzv. Buckinghamov II-teorem kojim se izvode relevantne turbulentne veličine za zadani poznati skup karakterističnih veličina i njihovih dimenzija (npr. Stull 1988). Postupak se bazira na dimenzijskoj analizi gdje broj ključnih varijabli problema mora biti jednak broju osnovnih dimenzija problema (npr. duljina, masa i vrijeme). [Poboljšanje ove vrlo jake fizikalne metode je tzv. direkcionalna (usmjerena) dimenzijska analiza u kojoj se razlikuju smjerovi, npr. vertikalni i horizontalni.] Tako se teorijom sličnosti dolazi do npr. lokalne sličnosti, Monin-Obukhovljeve sličnosti, sličnosti izmješanog sloja, sličnosti za slobodnu konvekciju ($u_* \rightarrow w_*$ i relevantni vertikalni tok je tada

$\overline{\theta'w'} = \theta_* w_*$), sličnosti Rossbyjevog broja za granični sloj (tada je karakteristična geometrijska skala z_0), itd. Ako turbulentno strujanje ima nekoliko karakterističnih skala u prostoru, vremenu a onda vjerojatno i u brzini, onda je analiza kompliciranija i najčešće manje očigledna.

Buckinghamov II-teorem je osnovni teorem dimenzijske analize. On kaže da se jednadžba s n fizičkih varijabli, koje su mogu izraziti s k neovisnih fundamentalnih veličina, može ekvivalentno izraziti setom od $p = n - k$ bezdimenzijskih varijabli konstruiranih iz originalne jednadžbe. Moć teorema je u tome da se mogu pretpostaviti i početno nepoznate jednadžbe, imajući na umu fizikalno najbitnije (neovisne) varijable (npr. u^* , θ^* , itd.) i optimalan set preostalih dimenzijskih parametara (npr. ubrzanje g , referentna temperatura θ_0 , itd). Za dva dinamička sustava kažemo da su slični ako im spomenute varijable i parametri koincidiraju (poput sličnosti trokuta).

Inače, već smo i ranije u skripti koristili dimenzijsku analizu za procjene pojedinih parametara. Podsjetimo se parabole energije planinskih valova prema Smithu (1980), kratko je bila spomenuta u dijelu o uzgonskim valovima: ona se može 'pogoditi' tj. procijeniti na osnovi najbitnije dinamike i geometrije. Dimenzijsku analizu koristimo i dalje u preostalom dijelu ove skripte. Spomenuti Buckinghamov II-teorem je bitan alat i u drugim disciplinama fizike, npr. u astrofizici i fizici plazme.

e) Sloj blago-konvektivnog miješanja

Atmosferski konvektivni sloj je najčešće pokriven stabilnim slojem slobodne atmosfere; pri tom turbulentno miješanje u ABL-u obično dovodi do formiranja dobro izmiješanog sloja (ili sloja miješanja, ili vanjskog sloja). Ovaj sloj se nalazi iznad prizemnog sloja. Najčešće se takav sloj javlja iznad kopna za vrijeme jakog zagrijavanja površine i iznad oceana kad je zrak blizu morske površine hladniji od morske vode. Brzina vjetra i potencijalna temperatura su gotovo neovisni o visini tj. brzina vjetra i potencijalna temperatura su približno konstantni u tom sloju i turbulentni vertikalni tok varira približno linearno s visinom. Pretpostavljamo da turbulencija iščezava na vrhu graničnog sloja, odnosno pada na malu vrijednost od one oko sredine ili donjeg dijela sloja miješanja. Opažanja pokazuju da se turbulentni tok tada može jednostavno prikazati preko (nelinearnih) relacija:

$$\begin{aligned} \overline{(u'w')}_s &= -C_d |\overline{\mathbf{V}}| \overline{u} \\ \overline{(v'w')}_s &= -C_d |\overline{\mathbf{V}}| \overline{v} \end{aligned} \quad (16)$$

C_d je bezdimenzijski koeficijent otpora. Index 's' ukazuje na površinske (engl. *surface*) vrijednosti. Početne aproksimativne jednadžbe (1) se tada mogu jednostavno integrirati po visini od površine do vrha konvektivnog graničnog sloja $z=h$. Dobivamo nakon dijeljenja s dubinom cijelog sloja:

$$\begin{aligned} f(\overline{v} - \overline{v}_g) &= -\overline{(u'w')}_s / h = C_d |\overline{\mathbf{V}}| \overline{u} / h \\ -f(\overline{u} - \overline{u}_g) &= -\overline{(v'w')}_s / h = C_d |\overline{\mathbf{V}}| \overline{v} / h \end{aligned} \quad (17)$$

te ako izaberemo koordinatne osi tako da je $\overline{v}_g = 0$, tada su rješenja:

$$\begin{aligned}
\bar{v} &= \kappa_s |\bar{\mathbf{V}}| \bar{u} \\
\bar{u} &= \bar{u}_g - \kappa_s |\bar{\mathbf{V}}| \bar{v}, \\
\bar{u} &= \frac{\bar{u}_g}{1 + (\kappa_s |\bar{\mathbf{V}}|)^2}
\end{aligned} \tag{18}$$

gdje je dimenzijska konstanta $\kappa_s \equiv \frac{C_d}{(fh)}$, 1/(m/s). Brzina vjetra u ovakvom izmiješanom sloju je

manja od brzine geostrofičkog vjetra i ima komponentu gibanja u smjeru nižeg tlaka; ne pokazuje nisku mlaznu struju kao u slučaju Ekmanovog (tj. neutralnog) sloja. Inače, C_d prilično varira, ovisno o podlozi, itd., no grubi srednjak mu je reda veličine 0.002. Očito da je (16) nelinearan zakon (kvadratna ovisnost turbulentnih tokova o srednjoj brzini vjetra). Postoje različite varijante ove ideje, koja je prilično potkrijepljena mjerenjima kad postoje približno stacionarni uvjeti u prizemnom sloju; npr. $u_*^2 = C_D U_{10}^2$, gdje je $C_D \approx C_d$ dok je U_{10} srednji iznos brzine vjetra na 10 m iznad podloge.

Ponekad postoji nekoliko izmješanih podslojeva koji slabo međusobno komuniciraju s turbulentnim (a vjerojatno i ostalim, poput radijacije) tokovima dok ih razdvajaju podslojevi stabilnog zraka (inverzije). To je češće slučaj nad otvorenim morem, gdje je slabije izražen dnevni hod pa vremenske konstante različitih procesa u međugri imaju više prilike da usklade takve višeslojne kvazi-stabilne strukture. Tada dolazi do suptilnih razvoja između kratkovalne i dugovalne radijacije, mikrofizike i naoblake, turbulencije, oslabljene srednje advekcije i valovite površine mora.

Ovisno o temperaturi mora i srednjem strujanju, npr. površinska magla može prijeći u Sc naoblaku a uz dovoljno turbulencije nakon nekoliko sati ova može prijeći u npr. *Cu fra*, *hum*. Magla pri površini mora se može pojaviti u nekoliko tipičnih situacija, ovisno koliko je temperatura mora niža/viša od prizemnog sloja zraka. Taj linearni odnos onda ulazi u nelinearnu relaciju tlaka vodene pare u zraku i to onda određuje da li će doći do zasićenja zraka vodenom parom (i magle) ili ne. Pri nagloj, posebice skokovitoj promjeni karakteristike podloge, npr. temperature ili hrapavosti, može doći do formiranja tzv. internog graničnog sloja.

Hrapavost mora je, za razliku od hrapavosti kopna, promjenljivija i mijenja se u ovisnosti o stanju i strujanju mora. Najjednostavnija ovisnost je dana Charnockovom relacijom $z_{0,SEA} = const u_*^2/g$, gdje je u_* brzina trenja, tj. karakteristična brzina za turbulentne procese a konstanta je ~ 0.015 . Moderni oceanografski modeli mijenjaju tu konstantu u ovisnosti o morskom spektru valova i nestacionarnosti morskih struja.

f) Osnovne jednadžbe konvektivnog sloja miješanja

U horizontalno homogenom strujanju jednostavnog konvektivnog ABL-a, CABL, bez divergencije zračenja, bez oslobađanja latentne topline zbog faznih promjena vode ili/i oborine, jedn. očuvanja srednje pot. temp. glasi

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} = - \frac{\partial (\overline{w' \theta'})}{\partial z}. \tag{19}$$

Integrirajući (19) kroz cijelu dubinu CABL-a, h , dobije se

$$\frac{\partial \widehat{\theta}}{\partial t} = \frac{(\overline{w'\theta'})_{sfc} - (\overline{w'\theta'})_{ent}}{h} \quad (20)$$

gdje je proces uvlačenja opisan 2. članom na desnoj strani; on predstavlja osobine kinematičkog toka topline u slobodnoj atmosferi što je primiješan niže, u sloj miješanja, pa je stoga povezan s promjenom (ponekad skokovitom) θ na inverziji. 1. član na desnoj strani je površinski tok kinematičke topline. Pretpostavimo da na inverziji postoji skokovita promjena $\Delta\theta_h = \theta_{h+} - \widehat{\theta}$ kroz izuzetno tanki sloj inverzije, što nije sasvim nerealna situacija. Onda je moguće prikazati 2. član desne strane od (20) kao produkt pripadne brzine uvlačenja, w_{ent} , i temperaturnog skoka $\Delta\theta_h$, tj.

$$\begin{aligned} (\overline{w'\theta'})_{ent} &= -w_{ent} \Delta\theta_h \\ &= -\left(\frac{\partial h}{\partial t} - w_{sub}\right) \Delta\theta_h, \end{aligned} \quad (21a)$$

gdje je w_{sub} brzina supsidencije na većoj skali: $w_{sub} = -\text{div}(\mathbf{v}) h$, uz \mathbf{v} što predstavlja vektor horizontalnog srednjeg vjetera u CABL-u (dakle, vertikalno, po visini h , usrednjeni vjetar).

Preuredimo li (21a) dobijemo jedn. za rast ili pad dubine CABL-a kao funkciju toka uvlačenja, temperaturnog skoka inverzije i brzine supsidencije:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{(\overline{w'\theta'})_{ent}}{\Delta\theta_h} + w_{sub} = w_{ent} + w_{sub}. \quad (21b)$$

Slijedi da CABL raste uvlačenjem toplog zraka odozgo iz slobodne atmosfere, $w_{ent} > 0$, a opada s vertikalnom brzinom supsidencije tjeranom visokim poljem tlaka. Rast CABL-a je ograničen stabilnim slojem slobodne atmosfere definiranim skokom pot. temp. na vrhu CABL-a.

Tok uvlačenja kinematičke topline ovisi o w_{ent} i $\Delta\theta_h$. Stoga vrijedi konstruirati prognostičku jedn. za navedeni skok pot. temp. na inverziji:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta\theta_h}{\partial t} &= \frac{\partial \theta_{h+}}{\partial t} - \frac{\partial \widehat{\theta}}{\partial t} \\ &= \gamma_\theta \left(\frac{\partial h}{\partial t} - w_{sub}\right) - \frac{\partial \widehat{\theta}}{\partial t} \end{aligned} \quad (22)$$

gdje je γ_θ vertikalni temperaturni gradijent od θ . Jedn. (20), (21b) i (22) su prognostički sustav jedn. za razvoj jednostavnog CABL-a. Međutim, taj sustav nije zatvoren jer ima više nepoznanica od broja jedn. Ako nema povezivanja (engl. *coupling*) sustava s jedn. bilance energije tla, onda površinski tok kinematičke topline, tj. 1. član na desnoj strani od (20) mora biti zadan. Nadalje, vanjske varijable su w_{sub} i γ_θ pa još samo preostaje specificirati kinematički tok uvlačenja. Za tu svrhu, činimo važnu i osjetljivu pretpostavku da je taj tok direktno povezan s površinskim tokom, tj.

$$(\overline{w'\theta'})_{ent} = -\beta (\overline{w'\theta'})_{sfc}, \quad (23)$$

uz koeficijent β kao zadanu konstantu, ili u ovisnosti o termodinamičkim osobinama inverzije. Tu je uključena i pretpostavka da je uvlačenje prvenstveno tjerano jačinom velikih vrtloga forsiranih površinskim tokovima koji međudjeluju sa stabilno stratificiranom slobodnom atmosferom. Prema ograničenim mjerenjima i finim numeričkim simulacijama velikih vrtloga (tzv. LES⁷, od engl. *Large-Eddy Simulations*, vidi npr. Cuxart, 2015) $\beta \approx 0.2$. Dinamički gledano, to znači da još oko 20 % ekstra topline doprinosi razvoju dnevnog ABL-a, tj. CABL-a, zbog uvlačenja toplog zraka koji potječe iz slobodne atmosfere. U stvarnosti, fluks uvlačenja još ovisi i o tokovima vodene pare te o smicanju vjetra; prvi se parametrizira za CABL pomoću površinskog toka vlažnosti, a drugi pomoću u^* .

Na donekle sličan način kao u (20), može se opisati razvoj srednjeg vjetra u CABL-u. Pored vertikalno integriranih tokova impulsa na desnoj strani takvih jedn., još se javljaju komponente sile gradijenta tlaka i Coriolisove sile. Razumno je tada pretpostaviti, kao 1. aproksimaciju, da su i turbulentni tokovi impulsa na dnu i vrhu CABL-a povezani na sličan način kao u (23).

g) Najnovija saznanja o konvektivnom graničnom sloju

Sergej Zilitinkevich i sur. (2021) na novi način rješavaju staru paradigmu konvektivnog prizemnog pa i cjelokupnog konvektivnog graničnog sloja. Radi se o konvektivnoj i dinamičkoj (smicanje vjetra) nestabilnosti; odnosno, o uzgonom generiranim mlazovima i smicanjem stvorenih vrtloga. U suprotnosti s prihvaćenom teorijom Kolmogorova i kasnije, da se veći vrtlozi spontano lome u sve manje turbulentne vrtloge i kaotično se šire u 3D (engl. direct or downscale cascade), vertikalni konvektivni mlazovi zraka, uzgonom orijentirani i vođeni, ne lome se u manje mlazove nego se spajaju u veće mlazove (engl. plumes). Ovo zadnje znači prijenos energije s manje na veću skalu (engl. inverse or upscale energy transfer).

Prvi transfer energije, direktan, s veće na manju skalu, ultimativno završava viskoznom disipacijom i prevođenjem TKE u toplinu (na kraju, vrlo mali iznos). Sasvim drugačiji prijenos konvektivne energije turbulencije je s manje k većoj skali, pri čemu se konvektivna energija turbulencije prevodi u samo-organizirane strukture strujanja; to može prijeći u organizirane mezoskalne konvektivne strukture. Prvi transfer energije predstavlja prijelaz iz „reda u kaos“ i koncept „termalne smrti“ sustava. Drugi pak transfer predstavlja suprotno: „iz kaosa (nereda) u red“. [Nietzsche je to zvao „kreativni kaos“].

h) Stabilni sloj

Obično se dijeli na tradicionalno (slabo) stabilni atmosferski granični sloj (SABL), gdje vrijedi većina aproksimacija uvedenih do sada (npr. bezdimenzijske funkcije za pripadni prizemni sloj jer ovaj blago do umjereno odstupa od neutralnosti) i na jako stabilni granični sloj o kojem se ne zna dovoljno jer je relativno tanak i toliko stratificiran da je teško mjeriti pripadne turbulentne flukseve (npr. Mauritsen i sur. 2007). Jedan od tipova takvih slojeva biti će diskutiran kasnije (nagnuti SABL bez osnovnog vjetra).

Stabilnim atmosferskim graničnim slojevima je teže odrediti dubinu nego nestabilnim i približno neutralnim slojevima (koji su dublji); to je stoga što je dinamika SABL-ova općenito kompliciranija i nerjetko pod utjecajem različitih čimbenika koji proizvode različite veličine karakterističnih turbulentnih vrtloga⁸. S druge pak strane, nestabilni i neutralni granični sloj su uvelike određeni veličinom dominantnih, najvećih vrtloga koji su ograničeni samom dubinom

⁷ LES eksplicitno razlučuje nehomogenosti i nestacionarnost veće skale gibanja i neizotropiju. Pripadno filtriranje NS jednadžbi LES-om mora biti u tzv. inercijskom području spektra turbulencije.

⁸ U SABL-u se javljaju različite veličine neizotropnih, spljoštenih vrtloga; nadalje, SABL može biti pod utjecajem uzgonskih i drugih kraćih valova (koji se ne mogu pojaviti u nestabilnom atmosferskom graničnom sloju).

cijelog sloja (npr. visinom sinoptičke inverzije). Dubina SABL-a se nerjetko parametrizira prema Zilitinkevichu (1972) kao

$$h_{SABL} = \text{const} (u^* L/f)^{1/2}, 0.4 \leq \text{const} \leq 0.7, \quad (24)$$

gdje su ključni parametri: brzina trenja, Obukhovljeva duljina i Coriolisov parametar. Uočimo da je ova dubina h_{SABL} donekle slična dubini onoj za Ekmanov sloj, s time da ovdje ulogu vrtložne difuzivnosti, K_m , igra pripadni produkt $u^* L$ (ujedno uočimo da ovi parametri pripadaju skaliranju prizemnog sloja, dok f dolazi „odozgo“, tj. s velike skale).

13. OBUKHOVLJEVA DULJINA, L, horizontalni turbulentni sloj

Obukhovljeva (iz ruskog: Obuhov, od Обухов Александр Михайлович) duljina L potječe iz teorije sličnosti, mada se može i drugačije izvesti (npr. iz TKE jedn.). Vidjeli smo da u neutralno-stratificiranom prizemnom sloju vrijedi

$$\bar{u}(z) = \frac{u_*}{k} \ln \frac{z}{z_0}. \quad (1)$$

Izraz (1) pokazuje logaritamsku ovisnost horizontalne brzine vjetra \bar{u} o visini u prizemnom sloju z , tj.

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \frac{kz}{u_*} = 1 \quad (2)$$

prikazuje bit bezdimenzijskog (univerzalnijeg) pristupa. Ono dovodi do svojevrstne univerzalnosti novodobivenih izraza; mjerenja pokazuju da (2) vrijedi gotovo svugdje, tj. u skoro svakom neutralnom prizemnom sloju. Pri tome se u_* mijenja ovisno o lokalitetu, no mijenjaju se i pripadni profili vjetra što znači da vertikalni profil vjetra ovisi o karakteristikama turbulencije na nekom lokalitetu na približno univerzalan način. Kako $\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$ bezdimenzionirano s $\frac{u_*}{kz}$ daje 1, izlazi da su svi profili slični bez obzira na lokaciju! Ovdje nema upliva temperature pa je razumljivo da ovaj logaritamski profil vrijedi samo u neutralnoj atmosferi.

Monin, Obukhov, Lumley, Panofsky, Businger, Tennekes, Wyngaard, Zilitinkevich, Larsen, Högström i drugi znanstvenici su proučavali problem bezdimenzioniranja strujanja za slučaj kada su uvaženi i termički efekti, tj. utjecaj stratifikacije na turbulenciju. Problem su postavili ovako: u stabilnoj i labilnoj stratifikaciji ne vrijedi točno $\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \frac{kz}{u_*} = 1$ već se to korigira (vidi prošlu lekciju)

kao

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \frac{kz}{u_*} = \phi_m\left(\frac{z}{L}\right), \quad \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} \frac{kz}{\theta_*} = \phi_h\left(\frac{z}{L}\right) \quad (3a)$$

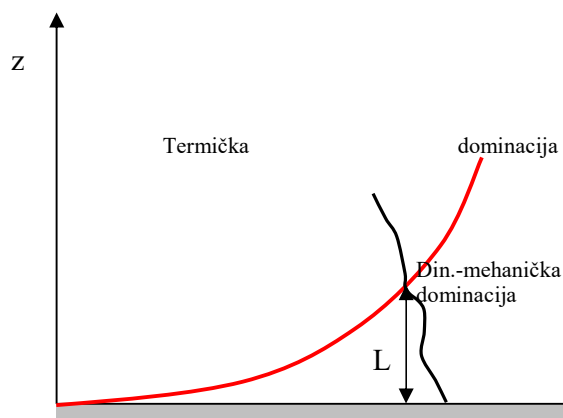
gdje je ϕ_m opća funkcija sličnosti (ekivalentan izraz se postavlja za potencijalnu temperaturu koristeći ϕ_h) koja se integralom povezuje sa psi-funkcijom iz prošle lekcije. Očito je da je 1. član u razvoju ϕ_m konstanta jednaka jedinici, itd. Eksperimentalno je utvrđeno da je

$$\phi_m\left(\frac{z}{L}\right) = \begin{cases} 1 + 4.7z/L, \dots, L > 0 \\ 1, \dots, L \rightarrow \infty \\ (1 - 15z/L)^{-1/4}, \dots, L < 0 \end{cases}, \quad (3b)$$

gdje izrazi na desnoj strani od (3b) redom vrijede za stabilno, neutralno i nestabilno stratificirani prizemni sloj. Za prijenos topline, točnije potencijalne temperature (ekvivalentno do na faktor $\rho_0 C_p$), $\phi_h(z/L) = 0.74 + 4.7z/L$ za stabilno stratificirani prizemni sloj, odnosno $\phi_h(z/L) \approx 0.74(1 - 9z/L)^{-1/2}$ za nestabilno stratificirani prizemni sloj (postoje i malo drugačiji izrazi, ovisno o autorima). Očito da $\phi_m \approx 1 + 15/4 z/L \dots = 1 - 3.75 z/L \dots$ u statički nestabilnom prizemnom sloju.

Veličina L je bitna veličina u mikrometeorologiji: od obrade mjerenja i daljeg teorijskog razvoja problema turbulencije pa do numeričkog modeliranja vremena i klime. Modelarima trebaju procjene turbulentnih tokova osnovnih meteoroloških polja i tu je L vrlo bitan. Termičko i mehaničko generiranje turbulencije u prizemnom sloju je kompaktno uključeno u L i to ćemo pokazati. Ako je visina z bezdimenzionirana s L , vertikalni profili će biti slični bez obzira na male do umjerene varijacije u stratifikaciji prizemnog dijela graničnog sloja. Turbulentni tok impulsa je određen s u^* , tok temperature s $\langle w'\theta' \rangle_s$, gdje $\langle \rangle$ predstavlja usrednjavanje turbulentnog toka dostupno istraživaču i podacima a 's' znači prizemne vrijednosti ('surface'), npr. oko 2 m. Ostale relevantne veličine, točnije parametri, su ubrzanje sile teže 'g' i referentna temperatura θ_0 . Buckinghamov teorem u teoriji sličnosti tvrdi da se sve ove navedene veličine mogu povezati u dimenziju [m] na jedinstveni način i to je L . Ovaj postupak ostavljamo za malu vježbu (naputak: impuls ide u brojnik), da se izvede L na upravo opisanom postupku teorije sličnosti, Slika 13.1.

Još jednom, Obukhovljeva duljina se definira kao **visina gdje se dinamičko-mehaničko generiranje turbulencije približno izjednačuje s termičko-uzgonskim doprinosom generiranju turbulencije. Poznavajući meteorološka polja na jednom nivou prizemnog sloja, iz modela ili mjerenja, ova se polja mogu teorijom sličnosti i potrebnom vrijednošću z/L konzistentno raspodijeliti kroz cijeli prizemni sloj.**



Slika 13.1. Ilustracija Obukhovljeve duljine L i obične visine z . U donjem dijelu dominiraju dinamički efekti (trenje i smicanje), dok uzgonskim efektima i pripadnim strukturama treba malo veća udaljenost od podloge da se sasvim razviju. Primijetimo da L sadrži turbulentni mehanički tj. dinamički efekt, u^* , i termodinamički efekt, tj. θ^* (vidi ispod).

Indirektno L može (do najviše) umjereno varirati ovisno o hrapavosti podloge. Polazeći od jednadžbe za kinetičku energiju turbulencije ($TKE = \langle e \rangle = \langle u_i' u_i' \rangle / 2 = \langle E \rangle$, ili s potezom iznad), što je detaljno prikazano u idućem poglavlju skripte, dolazimo također do izraza za Obukhovljevu duljinu. Dakle, pretpostavimo da vrijedi prognoza za E :

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = \underbrace{-u'w'}_a \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \underbrace{v'w'}_c \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \underbrace{\frac{g}{\theta}}_d \overline{w'\theta'} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \left[w' \left(\frac{p'}{\rho_0} + E \right) \right]}_e - \underbrace{\varepsilon}_f. \quad (4)$$

U jednadžbi (4) članovi b i c su dinamičko-mehanički pokretači turbulencije, dok je član d termičko-uzgonski pokretač (labilna stratifikacija) ili potrošač (stabilna stratifikacija) turbulencije.

O članovima e (transporti) i f (disipacija) bit će više riječi kasnije. Pojednostavimo analizu tako da srednji vjetar puše samo u x-smjeru. Dva moguća generirajuća člana moraju biti jednaka za $z = L$ pa vršimo jednostavno izjednačavanje, tj. tražimo stacionarnu ravnotežu između članova **b** i **d** u (4) zanemarujući sve ostale (u turbulenciji općenito važne) članove:

$$\overline{u'w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \sim \frac{g}{\theta} \overline{w'\theta'}, \quad (5)$$

bezdimezionirajući srednje smicanje na lijevoj strani (5) dobijamo

$$\overline{u'w'} \frac{u_*}{kL} \sim \frac{g}{\theta} \overline{w'\theta'}, \quad (6)$$

gdje je ključno da se usporedba radi za $z = L$, iz čega proizlazi:

$$L \sim \frac{\bar{\theta}}{gk} \cdot \frac{u_*^3}{\overline{w'\theta'}}, \quad [m]. \quad (7)$$

Sada uz pretpostavku, tj. definiciju

$$u_* = \left(\overline{-u'w'} \right)_0^{\frac{1}{2}} \quad (8)$$

te uvrštavanjem u (7) i uzimajući turbulentne tokove impulsa i topline pri tlu, $(\)_0$, dobijemo L .

Iz dobijenog izraza vidimo da L sadrži dva moguća generacijska mehanizma turbulencije. Predznak ovisi samo o $\overline{w'\theta'}_0$ tj. o turbulentnom toku topline i

$$\begin{aligned} \overline{w'\theta'}_0 &> 0 \quad \text{u labilnoj stratifikaciji} \\ \overline{w'\theta'}_0 &= 0 \quad \text{u neutralnoj stratifikaciji} \\ \overline{w'\theta'}_0 &< 0 \quad \text{u stabilnoj stratifikaciji.} \end{aligned}$$

Kako su dobiveni predznaci u suprotnosti s predznakom Richardsonovog broja po kojem određujemo stratifikaciju atmosferskog graničnog sloja, radi usklađivanja izraza za L stavljamo negativan predznak (-), tako da $L > 0$ u stabilnoj stratifikaciji, te izraz (7) za L postaje.

$$L = -\frac{\bar{\theta}}{gk} \cdot \frac{u_*^3}{\overline{w'\theta'}_0}, \quad [m]. \quad (9)$$

Odavde slijedi:

$$\begin{aligned} < 0 &\quad \text{labilna stratifikacija} \\ \mathbf{L} = \infty &\quad \text{neutralna stratifikacija} \\ > 0 &\quad \text{stabilna stratifikacija.} \end{aligned}$$

Definiramo bezdimenzijsku visinu

$$\zeta = \frac{z}{L}, \quad (10)$$

iz čega proizlazi

$$\zeta \begin{cases} < 0 & \text{labilna stratifikacija} \\ = 0 & \text{neutralna stratifikacija} \\ > 0 & \text{stabilna stratifikacija.} \end{cases}$$

Postoji direktna veza između Richardsonovih brojeva graničnog sloja, ovaj put preko (10), te Pr , kao i prije.

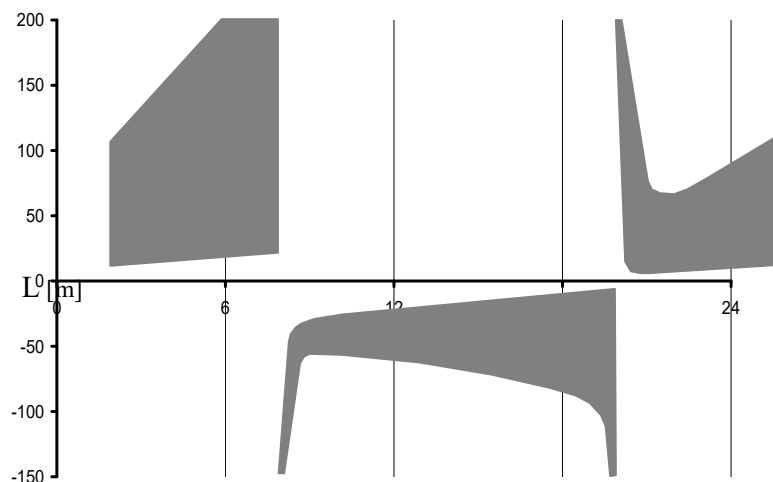
Bezdimenzioniramo li temperaturni turbulentni tok sa u_* tj.

$$\theta_* = \frac{\overline{-w\theta_0}}{u_*}, \quad (11)$$

te uvrstimo u (9) dobijemo drugi oblik za L :

$$L = \frac{\bar{\theta}}{gk} \cdot \frac{u_*^2}{\theta_*}. \quad (12)$$

Očito da L nije dobro definiran u striktno neutralnoj stratifikaciji (koja ionako ima više akademsko nego praktično značenje). Tipičan raspon promjene Obukhovljeve duljine L kroz dnevni period je prikazan na Slici 13.2.



Slika 13.2. Ilustracija dnevnog hoda Obukhovljeve duljine L ; vrijeme je u satima dato na x-osi. Budući da kratko nakon izlaska sunca i malo prije zalaska sunca tokovi topline obično mijenjaju predznak u sinoptički slabo-poremećenim uvjetima, pripadni vertikalni tok topline je tada oko nule. Tada $L \rightarrow \pm \infty$ kao što slika pokazuje oko npr. 8 i 20 sati.

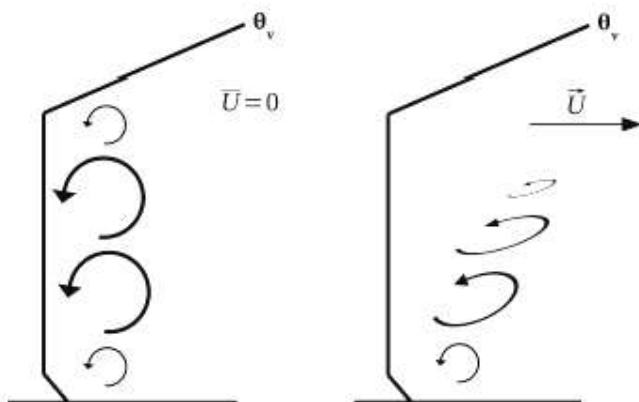
Nije pretjerano reći da L najkompaktnije i dovoljno kompletno opisuje razvoj prosječnog horizontalnog prizemnog sloja u kojem postoji strujanje (a hlađenje nije preveliko, tj. da L ne bude manji od npr. 1-2 m u prosjeku kroz dulje od 1 h). Uočimo da L ne predstavlja neku tipičnu veličinu turbulentnih vrtloga. Tranzijentno ponašanje $L \pm \infty$ pri izlasku i zalasku sunca se relativno jednostavno rješava u računima s L , no veći je problem kad $L \rightarrow \pm 0$, tada $Ri \rightarrow \pm \infty$.

a) Konvektivni granični sloj

Ako postoji smicanje, pri skaliranju izmješanog prizemnog sloja valja prvo koristiti donji izraz iz (3b) za definiranje vertikalnih profila osnovnih meteoroloških varijabli poput $u(z)$. Na krajnjoj konvektivnoj strani, bez smicanja vjetra, Sl. 13.3, lijevo, je tzv. slobodna konvekcija (*free convection*) i tada je w^* karakteristična skala za konvektivnu turbulentnu brzinu (pronađite isto za pot. temp.!):

$$w_* = [(\overline{\theta'w'})_0 g \frac{z_{INV}}{\theta_0}]^{\frac{1}{3}}. \quad (13)$$

Izraz (13) se najjednostavnije dobija koristeći Buckinghamov teorem. Slobodna konvekcija se događa npr. nad toplim mirnim morem kad nema vjetra, Sl. 13.3, lijevo.



Slika 13.3. Efekt stratifikacije, $\theta_v(z)$, i vertikalnog smicanja srednjeg vjetra na smanjenje vertikalnog turbulentnog miješanja. Bez smicanja (lijevo) turbulentne strukture su uglavnom određene udaljenošću od podloge i inverzije. Prisutnost smicanja (desno) dovodi do rastezanja i djelomičnog razdvajanja, tj. slabije povezanosti vrtloga, odnosno pripadnih turbulentnih struktura po visini.

Kad se radi o kombinaciji ove i prethodne turbulentne karakteristične brzine, tj. o smicajućem konvektivnom ABL-u (engl. '*Convective ABL*', CABL), Sl. 13.3, desno, Larry Mahrt i ostali znanstvenici su predložili i pripadnu kombinaciju tih dviju skala turbulentnih brzina, poput $u_{TURB} = (au_*^2 + bw_*^2)^{1/2}$, gdje su a i $b = O(1)$ i dobijaju se iz mjerenja. U ovom izrazu navedena potencija može se varirati, npr. $2 \rightarrow 3$. Razvoj CABL-a je određen omjerom u^*/w_* , tj. omjerom L/z_{INV} , jer je omjer Obukhovljeve duljine i visine inverzije jednoznačna funkcija spomenutog omjera:

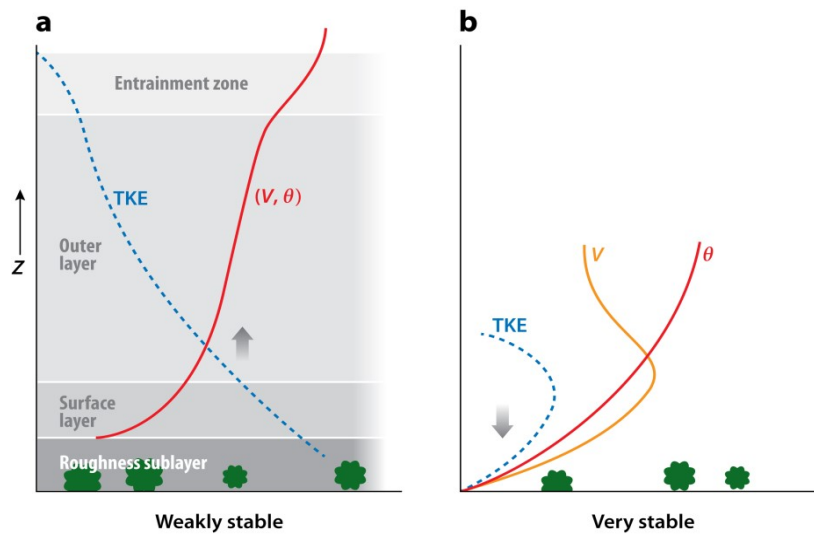
$$-L/z_{INV} = (u^*/w_*)^3/k,$$


gdje je k opet von Karmanova konstanta. Za vrlo mali pripadni omjer dominira slobodna konvekcija s ćelijskim strukturama; to su u ugl. neregularni skoro poligonalni mlazovi opkoljeni sa silaznim mlazovima i umjerenijom supsidencijom. Porastom spomenutog omjera ćelijske strukture se postupno zamjenjuju nepravilnim horizontalnim kvazi-cilindričnim strukturama (engl. '*rolls*'). Sam prijelaz prevladavajućeg konvektivnog režima se događa oko $0.3 < u^*/w_* < 0.7$ (npr. Fedorovich i Conzemius, 2008). Kroz i iznad barotropnog CABL-a nema značajne promjene geostrofičkog vjetra; u baroklinom (smicajućem) CABL-u to više nije slučaj.

b) Stabilni prizemni sloj

Ako postoji smicanje, pri skaliranju stabilno stratificiranog prizemnog sloja valja prvo koristiti gornji izraz iz (3b) za definiranje vertikalnih profila osnovnih meteoroloških varijabli poput $u(z)$, itd. Na primjer, opet se iz zadane dvije visine, pripadnih brzina vjetra i procjene vertikalnog toka topline može odrediti u^* i z_0 slično kao i u neutralnom prizemnom sloju. Ovisno koje su ulazne veličine poznate, nekad se mogu direktno uvrštavanjem dobiti ostale tražene veličine, a ponekad treba pribjeći iterativnom računanju (sličan je slučaj i za konvektivni prizemni sloj što se računanja tiče).

Druga krajnost stabilnog prizemnog sloja je da nema vjetra i pripadnog smicanja u stabilnoj stratifikaciji i taj je problem obično najteži i vodi k vrlo stabilnom graničnom sloju. Skica glavnih razlika između blago i jako stratificiranog atmosferskog sloja je prikazana na Sl. 13.3, a jedan od tipično jako stratificiranih slučajeva vidjeti ćemo pri katabatičkom strujanju (Prandtlov model) kasnije.



 Mahrt L. 2014. Annu. Rev. Fluid Mech. 46:23–45

Slika 13.3. Skica uobičajenog, slabo do umjereno stratificiranog (a) i jako stratificiranog graničnog sloja (b). Prikazani su tipični vertikalni profili vjetra, potencijalne temperature i kinetičke energije turbulencije (preuzeto od Mahrt, 2014).

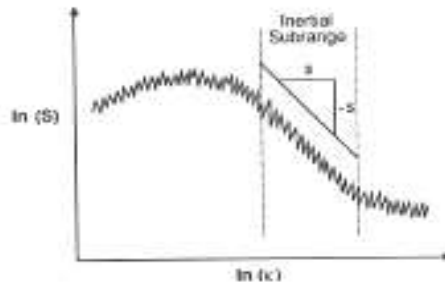
Monin-Obukhovljevo skaliranje visine u prizemnom sloju pomoću L , te pripadno skaliranje prizemnih vertikalnih turbulentnih tokova (presudnih za tipične ABL-ove) se najčešće koristi u meteorološkom numeričkom modeliranju, dakle u NWP i klimatskim modelima, za modeliranje donjeg rubnog uvjeta. Najjednostavniji pristup je korištenje koeficijenata pridnenog trenja što u sebi imaju korekciju zbog blagog odstupanja od neutralnosti, korekcija se definira pomoću L .

Uvod u statistički i spektralni opis turbulencije

Ovdje vrlo kratko uvodimo tek nekoliko važnih pojmova o statističkom tretiranju turbulentnih veličina. Za detalje, valja pogledati npr. uvod u statističku obradu geofizičkih signala, vremenske nizove vektora i skalara, te napredne kurseve o turbulenciji u fluidima. Iz tih kolegija je poznat pojam vjerojatnosti, gustoće energije, združenih raspodjela, standardne devijacije, te viših statističkih momenata (nagnutost, spljoštenost, itd.). Viši momenti su pod jakim utjecajem velikih odstupanja od srednjaka koja se relativno rijetko (ne često) događaju. Teško ih je mjeriti a stoga i proučavati.

Važan koncept je mjerenje i proračun (npr. vidi iduće poglavlje) kovarijanci i korelacija. Poznavajući koeficijent korelacije $r(t)$, što je simetrična veličina, integriranjem preko svih vremena dobija se tzv. integralna vremenska skala T . U turbulenciji se uvijek pretpostavlja da je taj integral konačan, te je onda T gruba mjera intervala preko kojeg je npr. $u(t)$ dobro koreliran sam sa sobom ako se $r(t)$ odnosio na $u(t)$. Drugim rječima, T je vremenska mjera intervala preko kojeg se $u(t)$ sjeća svoje prošlosti. Iza toga dolazi koncept lagranžijanske turbulentne duljine, itd. Ergodičnost pojedinih procesa je također važan pojam u proučavanju turbulencije. Nadalje, značajni su također centralni teorem, 1D i 3D spektri, *aliasing* izmjerenih podataka, longitudinalna i transverzalna korelacija, kaskada energije i spektralni prijenos energije.

Pretpostavimo da smo uspjeli izračunati i nacrtati gustoću spektra (snage) turbulentnog gibanja, tj. spektar doprinosa TKE-u (produkcija, disipacija, itd.), slično kao na Sl. 13.4.



Slika 13.4. Ilustracija pojednostavljenog spektra gustoće turbulentnog gibanja $S(\kappa)$ na log-log dijagramu gdje je κ valni broj. Posebno je istaknut zakon Kolmogorova, tzv. „-5/3 zakon“, tj. inercijsko područje. Ispred inercijskog područja, na manjim valnim brojevima, su najveći i energetski najjači vrtlozi; iza inercijskog, na velikim valnim brojevima, je disipacijsko područje.

Najosnovnija su tri glavna dijela atmosferskog turbulentnog spektra (mada ih može biti više, ovisno o prisutnim procesima), Slika 13.4. Prvi je energijski dio, ili energetska pod-skala, na najmanjim spektralnim (valnim) brojevima, k , turbulencije. Ovdje se turbulencija hrani, tj. dobija energiju zbog nestabilnosti relativno većih skala gibanja; to je u biti kinetička energija strujanja. Idući k relativno većim spektralnim brojevima, dolazi se to tzv. inercijalne ili inercijske pod-skale, gdje vrtlozi postupno i spontano kaskadiraju, tj. pucaju prenoseći spontano svoju energiju na relativno sve manje i manje vrtloge. Pri tome, ovi vrtlozi nemaju direktne informacije odakle je energija došla, niti kuda energija ultimativno ide (prosječno s veće na progresivno manju skalu). Ponekad ovaj dio spektra teži izotropnoj turbulenciji. I konačno, disipativni ili Kolmogorovljev mikro-režim, gdje turbulentni izotropni vrtlozi, manji ili reda veličine ~ 1 mm nestaju, ultimativno predajuću svoju energiju u toplinu. Jednostavnom se dimenzijskom analizom se dalje pokazuje da je spektralna gustoća energije (tj. kinetička energija turbulencije po jedinici mase i spektralnog broja) jednaka $\Delta E/\Delta k \sim \varepsilon^\alpha k^\beta$; tu treba odrediti α i β :

$$E_{in}(k) \approx coef. \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (14)$$

gdje je ε iznos disipacije TKE a k je valni broj za spomenuti inercijski dio spektra (jer vrtlozi po 'inerciji' prenose energiju s veće na manju skalu 'ne sjećajući' se odakle su zaprimili energiju i 'ne osjećajući' gdje će je položiti); $coef \approx 1.5$ za 3D spektar, ili oko 0.5 za 1D spektar. Ponekad se taj dio spektra naziva Kolmogorovljev inercijski spektar po čuvenom ruskom primijenjenom matematičaru. Finija korekcija za (14) ima faktor, tj. množenje korektivnom funkcijom $\varphi(k\eta) \sim 1$, gdje je $\eta = (v^3/E)^{1/4}$ te $\varphi(0) = 1$ (vidi ispod jedn. (17)).

Još je jednostavnije od (14) pokazati da je gustoća spektra energije u energetskom području proporcionalna s k^{-1} . Naime, pripadna gustoća $\Delta E/\Delta k \sim (KE)^\alpha k^\beta$; dakle, $\text{m}^2\text{s}^{-2}/\text{m}^{-1} = (\text{m}^2\text{s}^{-2})^\alpha \cdot \text{m}^{-\beta}$ odakle slijedi da su $(\alpha, \beta) = (1, -1)$,

$$E_{\text{energ}}(k) \sim KE k^{-1}. \quad (15a)$$

Sličnom analizom⁹ se pokazuje da se uzgonski dio spektra stratificirane turbulencije ponaša približno kao

$$E_{\text{uzg}}(k) \sim N^2 k^{-3} \quad (15b)$$

gdje je N uzgonska frekvencija. Ovaj pod-spektar (dio spektra) se može naći između energijskog i inercijskog režima u stabilno stratificiranoj turbulenciji; dakle, (15b) za relativno manji k , te (14) za veći k bi vrijedio za spektralnu gustoću varijanci od w' i θ' , tj. za $\langle w'^2 \rangle$ i $\langle \theta'^2 \rangle$. Uočimo da smo istu ovisnost o valnom broju k bili pokazali i za 2D „turbulenciju“ velike skale na početku poglavlja o graničnom sloju i turbulenciji; naravno, tamo je tumačenje osnovano na značaju i očuvanju enstrofije (i tamo postoji tzv. inverzna kaskada energije, s većih na manje valne brojeve gibanja).

Oba dijela spektra, (14) i (15b), za stabilno stratificiranu turbulenciju se mogu izvesti i bez dimenzijske analize, koristeći samo dvije uobičajene pretpostavke ($\langle w'\theta' \rangle \approx \partial\Theta/\partial z w'L$, te $\varepsilon \approx (w')^3/L$), gdje je L neka karakteristična duljina (znači, općenito nije Obukhovljeva duljina). Definira se novi, ukupni $\varepsilon_{\text{tot}} = \varepsilon + dE_\theta/dt$, gdje je zadnji član jednak $(g/\Theta)\langle w'\theta' \rangle = N^2\varepsilon^{1/3}L^{4/3}$, dok je w' izražen pomoću ε . Novi $\varepsilon_{\text{tot}} = \varepsilon(1 + N^2\varepsilon^{-2/3}L^{4/3})$ i pomoću njega se raspiše novi $w' \approx (\varepsilon L)^{1/3}(1 + N^2\varepsilon^{-2/3}L^{4/3})^{1/3}$, tj. w'^2 , što predstavlja mjeru za TKE. Prevede se isti izraz u Fourierov spektralni prostor: $\hat{w}^2(k) = FT(w'^2)$, te se diferencira po valnom broju k (ili jednostavno podijeli s k) pri čemu je $k \sim 1/L$. Konačan rezultat je gustoća spektralne energije $S(k) \sim \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} + Bk^{-3}$, gdje je B približno koeficijent s dimenzijom ($\approx \text{const} \cdot N^2$). Ovo je samo drugačiji način zapisivanja zbroja (14) i (15b). Ovaj $S(k)$ se može ugrubo zapisati i kao $S(k) \sim \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} (1 + B_1 k^{-4/3})$ gdje je novi dimenzijski faktor B_1 , a slabost prikaza ostaje to što B ili B_1 imaju dimenzije.

Na ovaj način uzgonski podspektar, ako postoji (a treba ili može da postoji u termalno stratificiranoj turbulenciji), je povezan s inercijskim područjem. Pored uobičajenog transfera energije turbulentnim vrtlozima veće k manjoj prostornoj skali, dio energije se konvertira u potencijalnu energiju. (To je 'zabranjen' proces u 2D turbulenciji gdje ne postoji značajna disipacija energije; stoga, u 2D turbulenciji energija se gomila na progresivno sve većoj skali, tj. manjim valnim brojevima, a enstrofija „curi“ na sve manju skalu.)

Uz primjenu (i valjanost) Taylorove hipoteze o 'zamrznutoj' turbulenciji, ova spektralna analiza jednako vrijedi u spektru valnih brojeva i pripadnih frekvencija. Pretpostavlja se da Taylorova hipoteza vrijedi ako je

$$\sigma_u/U < 0.5, \quad (16)$$

gdje su σ_u i U standardna devijacija i srednja brzina pojedine komponente strujanja (ovdje u -komponente).

⁹ Gustoća pripadne spektralne energije (sve po jedinici mase kao i do sada) po intervalu valnih brojeva Δk ima dimenzije $(\text{m/s})^2/(\text{m}^{-1})$; to je do na bezdimenzijsku konstantu proporcionalno u uzgonskom pod-spektaru s $N^\alpha k^\beta$. Iz toga se dobiju dvije jednostavne jednačbe za spomenute brojeve α i β .

Idući na progresivno sve manju skalu, dolazi se do turbulentne mikroskale i tu postoji također nekoliko definicija. Uglavnom, disipacija u toplinu se događa na skali reda veličine djelića milimetra. Sveukupno energija turbulencije u prosjeku prelazi, 'curi', s velikih valnih duljina (tj. malih valnih brojeva) na progresivno sve manje duljine vrtloga. To se ponekad naziva 'nizvodni' tok energije ('downscale energy cascade'). Kolmogorov je sredinom prošlog stoljeća izveo moderne matematičke osnove teorije turbulencije (vidi npr. Stull 1988, Lesieur 1997); na njegove se matematičko-statističke radove nastavljaju Monin, Obukhov, Yaglom, Zilitinkevich, itd. Njemu u čast je nazvana jedna od najmanjih prostornih turbulentnih skala, ona na kojoj se odvija disipacija. Izvodi se uz specifikaciju da je $Re \approx l$ i da je (konvektivna) promjena TKE jednaka disipaciji ε , tj. $u^3/L_0 \sim \varepsilon$, uz $uL_0 \approx v$ (jer $Re \approx l$), gdje je L_0 tražena duljina (kasnije = η_K). Iz toga slijedi tzv. Kolmogorovljeva mikroskalna duljina i brzina kao funkcije disipacije i viskoznosti (nakon navedenih pretpostavki, najjednostavnije je sljedeći izvesti na osnovi π -teorema):

$$\eta_K = (v^3/\varepsilon)^{1/4}, \quad v = (v\varepsilon)^{1/4}. \quad (17)$$

Ta duljina η_K je najmanja relevantna turbulentna duljina i u npr. viskoznom podsloju, pripadni mali vrtlozi imaju karakterističnu brzinu v . (Veliki vrtlozi su određeni s (u_0, l_0) .) Iz (17) se jednoznačno pronalazi i karakteristična vremenska mikroskala: $T = (v/\varepsilon)^{1/2}$. Primijetimo da se prethodno iskorištena činjenica o statistički stacionarnom stanju inercijskog režima za velike valne brojeve, $u^3/l \sim \varepsilon$, i pripadni početak disipacijskog režima, može i vratiti malo unatrag na relativno manje valne brojeve. Onda možemo skalirati pripadni TKE kao $du^2/dt \approx -A u^2(u/l)$, gdje je A konstanta; odmah se prepoznaje inercijski član koji advektira s (u/l) pripadnu energiju u^2 . Isti se izraz može zapisati i kao $du^2/dt \approx -A (ul)u^2/l^2$, što ovako napisano sugerira turbulentnu difuziju koeficijentom (ul) pripadne promjene gradijenta (tj. zakrivljenosti) TKE, u^2/l^2 .

Primijetimo da relativni omjer između najvećih i najmanjih relevantnih karakterističnih veličina turbulentnih vrtloga, l_0 i η_K , raste s Re : $l_0/\eta_K = l_0\varepsilon^{1/4}/v^{3/4} = l_0u^{3/4}/(l_0^{1/4}v^{3/4}) = (u_0/v)^{3/4} = Re^{3/4}$, što je za nekoliko redova veličine veće od 1 u turbulentnom strujanju. Nadalje, procijenimo li udio vrtložnosti koji posjeduju disipirajući vrtlozi, obzirom na velike, energetske vrtloge, dolazimo do spoznaje da veliku većinu vrtložnosti nose sa sobom upravo oni prvi, tj. mali, prvenstveno disipirajući vrtlozi. To slijedi iz omjera: $(v/\eta_K)/(u/l_0) = (l_0/\eta_K)/(u/v_K) = Re^{3/4}/Re^{1/4} = Re^{1/2}$. Fizikalno je to sasvim razumljivo jer mali vrtlozi imaju puno veću zakrivljenost nego veliki vrtlozi.

Strukturna funkcija 2. reda, što ćemo primijeniti na turbulentno strujanje male skale (dakle, to je barem približno homogena turbulencija čiji bi najmanji vrtlozi trebali biti i izotropni), glasi:

$$D_2(\mathbf{r}) \equiv \langle [u_1(\mathbf{x}+\mathbf{r}) - u_1(\mathbf{x})]^2 \rangle \quad (18)$$

gdje je u_1 komponenta brzine niz vektor \mathbf{r} , dok $\langle \dots \rangle$ znači uobičajeno usrednjavanje po ansamblu. Zbog pretpostavljene ispravnosti (14) te $\eta < r \ll L$, gdje je karakteristična dimenzija r između disipativne i energetske skale, redom η i L , vrijedi za razvoj pripadne turbulentne kinetičke energije $u^3/r \sim \varepsilon$. Stoga odmah slijedi za (18)

$$D_2(r) = C \varepsilon^{2/3} r^{2/3} \quad (19)$$

što se ponekad naziva i „dvo-trećinski zakon“ Kolmogorova. Neobično je i neintuitivno da $D_2(r) \sim r^{2/3}$ u (19) za inercijski dio spektra opada postupnije, tj. sporije no linearno s udaljenošću iako po definiciji (18) D_2 predstavlja kvadrat razlike polja brzine u dvije točke. Za (18) se može napisati prognostička jedn. na osnovi NS jednadžbi; to onda vodi k modeliranju turbulencije u

dvije točke (engl. *Two-point modeling*), za razliku od standardnog modeliranja u jednoj točki (*One-point modeling*) što se najčešće koristi u meteorologiji.

Spomenimo da se 2D spektri turbulencije obično ne javljaju u tradicionalnoj teoriji ABL-a, ali se javljaju u jednoj drugoj – geostrofičkoj turbulenciji. To je u stvari kvazi-2D teorija gdje je, između ostalog, očuvana enstrofija (srednji kvadrat vrtložnosti) pa je dozvoljena i srednja tzv. 'uzvodna' kaskada energije (*upscale energy cascade*), kao i malo prije spomenuta 'nizvodna', (*downscale energy cascade*). U toj teoriji je u principu jednako vjerojatno da dva manja vrtloga, ili uvjetno rečeno vala, načine jedan dulji val, ili uvjetno vrtlog, kao što je vjerojatan i obrnuti proces, tj. da veći val pukne predajući energiju manjim valovima. Ovo drugo je u prosjeku jedino što je dozvoljeno u atmosferskoj turbulenciji koja je nužno 3D. Naime, u ABL-u se u prosjeku ne događa da se npr. dva manja vrtloga sami od sebe udruže i načine veći vrtlog. To je moguće samo u pojedinoj 3D povremenoj individualnoj realizaciji turbulentnog polja, ali ne i u statistički relevantnim, karakterističnim realizacijama turbulentnih strujanja.

Povjesna perspektiva

Ogroman napredak u teoriji i mjerenjima graničnih slojeva je učinio Ludwig von Prandtl u 1. polovici 20. stoljeća postavljajući u kontekst postojeće napredne matematičke metode (perturbativne analize, u prvom redu) i djelomične laboratorijske činjenice (npr. Kundu i Cohen, 2002). On je uspostavio teoriju graničnih slojeva i krenuo u eksperimente u prirodi. Slijedili su veliki znanstvenici teorije nestabilnosti u geofizičkim fluidima poput Richardsona, Taylora, Kolmogorova, Sommerfelda, Monina, Landaua, Obukhova, von Neumana, Charneya, Rossbyja, Phillipsa, Batchelora, Towsenda, Lorenza, itd., da spomenemo tek nekoliko najvažnijih od njih. Internet pruža stotine stranica informacija o tim velikanima ispred svojeg vremena a uz nadahnuća za nove izazove i nepoznata ili neshvaćena nam ponašanja prirode, i u ovom kontekstu - posebice fluida. (Mnogi nobelovci su se u jednom periodu života bavili turbulencijom, poput A. Einsteina i L. Landaua).

14. PROGNOŠTIČKA JEDNADŽBA ZA VARIJANCE

Pregled problema

Postoje turbulentna strujanja koja se ne mogu adekvatno opisati 1. redom zatvaranja turbulentnih shema jer u takvim strujanjima viši statistički momenti nose bitan dio informacije o strukturi tog strujanja. Na primjer, 1. red zatvaranja, tj. obična K-teorija 1. reda, ako nema tzv. nelokalnu korekciju, uvijek daje turbulentni tok niz gradijente srednjeg promatranog polja ('*down-gradient*'). Taj je problem bolje riješen u potpunom 2. redu zatvaranja, no taj je pristup obično računski preskup; tako da tražimo i izvjestan među-pristup između 1. reda i potpunog 2. reda zatvaranja. Drugi primjer gdje je obična K-teorija neuspješna jest parametrizacija srednjaka od ($w'w'$); to je striktno pozitivna veličina, dok pripadni prikaz K-teorijom, $-K\partial W/\partial z$, može biti i pozitivan i negativan, ovisno o $W(z)$, pa je time i ovakav prikaz neadekvatan. Tada se rade kojekave doskočice, poput dijagnostičke procjene varijance $\langle w'^2 \rangle$ iz TKE i stratifikacije, tzv. nelokalna korekcija i ostali trikovi takve vrste.

Mada je točno da su spomenuti tokovi najčešće niz gradijente (gradijenti sami po sebi jesu lokalni) i u prirodi, to nije uvijek točno jer mogu nelokalni procesi tjerati flukseve suprotno od gradijenta srednjih polja. Najbolji primjer za to je tok topline u gornjem dijelu konvektivnog ABL-a, blizu inverzije, gdje veliki vrtlozi, veličine dubine ABL-a tjeraju toplinu kroz relativno hladniji središnji dio ABL-a k toplijoj inverziji. Postoje primjeri i u stabilnom ABL-u, gdje različiti valovi mogu tjerati turbulentni tok impulsa i od sporijeg ka bržem dijelu fluida (umjesto da je, kao u nekom prosjeku, obrnuto, tj. da se izgladuju prostorne varijacije u turbulentnom strujanju). Na primjer, kod jake i olujne bure postoji značajan, nezanemariv prijenos turbulencije iz viših k nižim slojevima (s 20 i 40 m, k 10 m), a što je nemoguće opisati bilo kojom K-teorijom 1. reda (dakle niti tzv. nelokalnom K-teorijom 1. reda). Nažalost, to mnogi istraživači ignoriraju.

Stoga je potrebno raspisati prognostičke jednadžbe za različite turbulentne tokove 2. reda; zatim, treba procijeniti koji bi među njima u prosjeku mogli biti dominantni te ih svakako zadržati, a ostale, uvjetno nedominantne turbulentne tokove dijagnostički izraziti pomoću prognoziranih tokova. Pretpostavljamo da prognozom traga matrice Reynoldsovih napetosti, što je ujedno i prognoza TKE, možemo adekvatno proračunati i ostale turbulentne tokove a onda i ukupno polje strujanja.

Proračun TKE je ekvivalentan računu varijanci turbulentnih fluktuacija brzine jer je TKE [$J/kg = m^2/s^2$] polovica zbroja pripadnih triju kvadrata fluktuacija.

Polazne pretpostavke i rješavanje problema

Fluid je nekompresibilan (kao i do sada). Za osnovno stanje vrijedi *hidrostatička aproksimacija*. Polazimo od i -te komponente jednadžbe gibanja:

$$\frac{\partial}{\partial t} u_i + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} p - \delta_{i3} g + f \varepsilon_{ij3} u_j + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} u_i, \quad (1a)$$

gdje sve oznake i simboli imaju uobičajena značenja. Koristimo *Boussinesqovu aproksimaciju*, dakle, ρ je konstantan svugdje osim u članu s uzgonom. Nadalje, osnovno stanje atmosfere je u hidrostatičkoj ravnoteži. Za lakši račun, gustoću, koja je u stvari polje od (x, y, z, t) kao i npr. temperatura, gdje god se pojavljuje zamijenimo s $\bar{\rho}$, a ubrzanje sile teže g s $g \left(1 - \frac{\theta'_v}{\theta_v} \right)$, gdje (\prime) znači perturbaciju (odstupanje); do toga treba doći zbog hidrostatičnosti osnovnog stanja.

Raspisujemo jednadžbe gibanja u tenzorskoj (Einsteinovoj) notaciji, varijable rastavimo na srednje stanje i odstupanja tj. fluktuacije u skladu s Reynoldsovim usrednjavanjem.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\bar{U}_i + u_i') + \bar{U}_j \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + u_j' \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + u_j' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i}(\bar{p} + p') - \delta_{i3} g + \delta_{i3} \frac{\theta_v'}{\theta_v} g \\ + f \varepsilon_{ij3} (\bar{U}_j + u_j') + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} (\bar{U}_i + u_i') \end{aligned} \quad (1b)$$

gdje je f Coriolisov parametar, ν koeficijent kinematičke viskoznosti fluida a ostale oznake imaju i dalje uobičajeno značenje. Da bismo izveli prognostičku jednadžbu za fluktuacije, od ove jednadžbe (1b) za ukupni vjetar oduzimamo jedn. za srednje stanje:

$$\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} = -\left(\frac{1}{\rho}\right) \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \delta_{i3} g + f \varepsilon_{ij3} \bar{U}_j + \nu \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial (\overline{u_i' u_j'})}{\partial x_j}. \quad (2)$$

Vektorska jednadžba za fluktuacije brzine strujanja zapisana tenzorski slijedi nakon spomenutog oduzimanja: (1b) - (2), tj.

$$\frac{\partial u_i'}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + u_j' \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + u_j' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} = -\left(\frac{1}{\rho}\right) \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \delta_{i3} \left(\frac{\theta_v'}{\theta_v}\right) g + f \varepsilon_{ij3} u_j' + \nu \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j^2} + \frac{\partial (\overline{u_i' u_j'})}{\partial x_j}. \quad (3)$$

Sljedeći korak je množenje jednadžbe (3) s $(2u_i')$ da članove $u_i' \frac{\partial u_i'}{\partial t}$ preoblikujemo u oblik

$$\frac{\partial}{\partial t} (\overline{u_i'^2}) :$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u_i'^2}}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \overline{u_i'^2}}{\partial x_j} + 2\overline{u_i' u_j'} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + u_j' \frac{\partial \overline{u_i'^2}}{\partial x_j} = -2\left(\frac{u_i'}{\rho}\right) \frac{\partial p'}{\partial x_i} + 2\delta_{i3} u_i' \left(\frac{\theta_v'}{\theta_v}\right) g + 2f \varepsilon_{ij3} \overline{u_i' u_j'} + 2\nu u_i' \frac{\partial^2 \overline{u_i'^2}}{\partial x_j^2} \\ + 2u_i' \frac{\partial (\overline{u_i' u_j'})}{\partial x_j}. \end{aligned}$$

Pozivajući se na pravila Reynoldsovog usrednjavanja, slijedi opća forma prognostičke jednadžbe za varijancu vjetra nakon usrednjavanja prethodnog izraza:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u_i'^2}}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \overline{u_i'^2}}{\partial x_j} + 2\overline{u_i' u_j'} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial (\overline{u_i'^2 u_j'})}{\partial x_j} = \\ -2\left(\frac{u_i'}{\rho}\right) \frac{\partial \overline{p'}}{\partial x_i} + 2\delta_{i3} \overline{u_i'} \left(\frac{\theta_v'}{\theta_v}\right) g + 2f \varepsilon_{ij3} \overline{u_i' u_j'} + 2\nu \overline{u_i'} \frac{\partial^2 \overline{u_i'^2}}{\partial x_j^2} + 2\overline{u_i'} \frac{\partial (\overline{u_i' u_j'})}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (4)$$

što opisuje vremenski razvoj varijance udara vjetra. Pojednostavimo neke članove u (4) prije primjene na atmosferski granični sloj (ABL) i prije tumačenja značenja pojedinih članova.

Član $\overline{u_i' \frac{\partial(u_i' u_j')}{\partial x_j}}$, zadnji u (4), je 0 po pravilima za Reynoldsovo usrednjavanje te ga izbacujemo.

Usrednjena forma od $2\nu(u_i' \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j^2})$, tj. predzadnji član u (4), raspisujemo kao

$$\overline{(u_i' \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j^2})} = \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u_i' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}} - \overline{\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right)^2} = \frac{1}{2} \overline{\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} (u_i'^2)} - \overline{\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right)^2}.$$

Pokusi i skalna analiza pokazuju da je u prethodnom izrazu drugi član puno veći od prvog (npr. provjerite koliko dugo treba difuziji da izglađi, tj. difuzira fluktuacije vjetra, ili temperature, koristite jedn. difuzije i skalnu analizu), pa viskozni član pišemo:

$$2\nu \overline{u_i' \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j^2}} \cong -2\nu \overline{\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right)^2} = -2\varepsilon,$$

gdje je viskozna disipacija definirana kao:

$$\varepsilon \equiv +\nu \overline{\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right)^2}. \quad (5)$$

Valja paziti da je „potez“ tj. Reynoldsovo usrednjavanje, ovdje uvijek nakon prethodnih operacija množenja, kvadriranja, itd; konkretno u (5), „potez“ ide nakon kvadrata poprečnih prostornih derivacija komponenata brzine. Očito da je (5) nelinearan sam po sebi i to značajniji što su vrtlozi manji i brži (treba razlikovati ovaj „obični“ ε od kvazi-tenzora uz Coriolisov član!).

Član tlaka u (4):

$$-2 \overline{\left(\frac{u_i'}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i}\right)} = -\left(\frac{2}{\rho}\right) \frac{\partial \overline{(u_i' p')}}{\partial x_i} + 2 \overline{\left(\frac{p'}{\rho}\right) \left[\frac{\partial u_i'}{\partial x_i}\right]},$$

gdje je faktor u uglatoj zagradi dio jednadžbe kontinuiteta za nestlačivu turbulenciju $\frac{\partial u_i'}{\partial x_i}$, dakle isčezava zbog spomenute Boussinesqove aproksimacije tako da taj član ne mijenja totalnu varijancu. Dakle,

$$-2 \overline{\left(\frac{u_i'}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i}\right)} = -\left(\frac{2}{\rho}\right) \frac{\partial \overline{(u_i' p')}}{\partial x_i}. \quad (6)$$

Član s Coriolisom, što općenito predstavlja relativno sporo vrtloženje strujanja:

$$2f \varepsilon_{ij3} \overline{u_i' u_j'} = 2f \left(\underbrace{\varepsilon_{123}}_{=1} \overline{u_1' u_2'} + \underbrace{\varepsilon_{231}}_{=-1} \overline{u_2' u_1'} \right) = 0$$

ne utječe na povećanje ili smanjenje TKE pa je u (4) pripadni doprinos nula.

Uvrštavanjem tih skraćenja i pojednostavljenja članova u (4), konačno dobivamo prognostičku jednadžbu za varijancu brzine vjetra:

$$\frac{\overline{\partial u_i'^2}}{\partial t} + \overline{U_j} \frac{\partial \overline{u_i'^2}}{\partial x_j} = +2\delta_{i3} \frac{g(\overline{u_i' \theta_v'})}{\theta_v} - 2\overline{u_i' u_j'} \frac{(\partial \overline{U_i})}{\partial x_j} - \frac{\partial \left(\overline{u_j' u_i'^2} \right)}{\partial x_j} - \frac{2}{\rho} \frac{\partial \overline{u_i' p'}}{\partial x_i} - 2\varepsilon. \quad (7)$$

I II III IV V VI VII

I = promjena varijance udara vjetra,
 II = advekcija varijance srednjim vjetrom,
 III = uzgonski član produkcije ili gubitka,
 IV = mehanička produkcija,
 V = turbulentni transport,
 VI = transport (preraspodjela) zbog varijacija kovarijance tlaka i brzine,
 VII = viskozna disipacija.

Evo još nekoliko dopunskih kratkih komentara o pojedinim članovima u (7). Uzgon, III, ovisno da li je uzgonski flux $\overline{w' \theta_v'}$ pozitivan (uobičajeno danju nad kopnom) ili negativan (najčešće noću nad kopnom), taj je član izvor ili ponor u (7). Mehanička produkcija, IV, je međudjelovanje fluxa, $\overline{u_i' u_j'}$, koji je najčešće negativan, dok je smicanje osnovnog vjetra najčešće pozitivno u ABL-u, pa s negativnim predznakom ovaj produkt daje pozitivan doprinos u (7). Inače, u pravilu to je uvijek produktivni član. Turbulentni transport, V, razbacuje varijance udara vjetra, dakle i sama turbulencija preraspodjeljuje spomenutu statistiku udara vjetra. Transport kovarijancom tlaka i brzine, VI, je prijenos varijance udara vjetra zbog gradijenta kovarijance fluktuacija tlaka i polja strujanja (*pressure transport term*); taj član rapidno izgladuje nehomogenosti i neizotropnosti u turbulentnim poljima na maloj skali (*return-to-isotropy term*). I konačno viskozna disipacija, VII, je ultimadni ponor varijance udara vjetra u (7); sama po sebi je uvijek pozitivna, a predznak u (7) joj je negativan. Skalnom analizom se pokazuje da je ova disipacija u prosjeku mala za velike energetske vrtloge (npr. za one usporedive s visinom dubokog konvektivnog ABL-a), dok najefektivnije guši male vrtloge (npr. manje od 10 cm). Drugim riječima, disipacija kao da pričekava da se veliki vrtlozi kroz svoje spontane nestabilnosti raspadnu na manje vrtloge pa da ih onda još efikasnije prigušuje. Nerijetko za viskoznu disipaciju vrijedi $\varepsilon \sim (TKE)^{3/2}/\ell$ gdje je ℓ karakteristična duljina vrtloga (dominantna geometrijska skala turbulencije). Disipacija je uvijek pozitivna veličina. U relaciji $\varepsilon \approx b(TKE)^{3/2}/\ell$, $b \sim 1/20$; pri tome je pretpostavljeno da je glavnina disipirajućih vrtloga približno izotropna (pretpostavka Kolmogorova).

Viši red zatvaranja parametrizacije relevantnih veličina turbulencije sada se može opisati tzv. K-teorijom višeg reda (pa to onda i nije dobro nazivati K-teorijom), npr. sada $K(x,y,z,t) \approx const \cdot (TKE)^{1/2} \ell \sim \langle u'^2 \rangle \tau$. Onda takve vrijednosti koristimo za parametrizaciju turbulentnih tokova u osnovnim jednadžbama.

Već je spomenuto da najmanji vrtlozi, tj. oni s prosječno najvećim valnim brojem u Kolmogorovljevom dijelu spektra, predaju svu pripadnu kinetičku energiju u toplinu. Drugim rječima, $TKE \rightarrow PE$, gdje je $\max(PE)$ određen disipacijom TKE -a: $C_p D\theta/Dt \sim \varepsilon$. Znajući ε , ili pripadnu karakterističnu dimenziju i brzinu tih najmanjih vrtloga, jednostavno se izračuna da se tu radi o jako maloj oslobođenoj temperaturi, npr. $(\Delta\theta/\Delta t)_{max} \sim 0.2$ K/h.

U potpuno razvijenoj turbulenciji enstrofija raste smanjenjem viskoznosti (govorimo o različitim fluidima) jer progresivno sve manje skale gibanja se javljaju u takvom strujanju, tj. dopušten je progresivno sve veći $\langle (\partial u'_i / \partial x_j)^2 \rangle$ u (5) odnosno (7). Na taj način produkt viskoziteta i enstrofije, ε , može ostati očuvan i u konačnici neovisan o viskoznosti; onda je ε kontroliran procesom inercijske kaskade vrtloga.

Između spomenutih najvećih vrtloga koji sadrže najviše energije, i najmanjih vrtloga koje rapidno rastapa viskoznost, postoji nekoliko pod-skala turbulentnih vrtloga. Energetski (najveći) vrtlozi su direktna posljedica nestabilnosti s veće skale, npr. termala, ili baroklinog smicanja kroz donju troposferu, pucanja KHV i uzgonskih valova, itd. Njihovim raspadanjem u primarno 3D, npr. rastezanjem i zakretanjem pripadnih vrtloga, nastaju novi vrtlozi koji su u prosjeku manji (tj. imaju veće valne brojeve od energetskih vrtloga). Najpoznatija pod-skala između velikih i malih vrtloga je tzv. inercijska pod-skala. Kroz inercijsku skalu vrtlozi uglavnom kaskadiraju k progresivno većim valnim brojevima ne osjećajući direktan utjecaj velikih vrtloga koji sadrže najviše energije, kao ni direktan utjecaj disipativne skale. Inercijski vrtlozi su dinamički i po veličini međusobno slični (vrijedi tzv. 'self-similarity'), kao što smo već rekli pred kraj prošlog poglavlja govoreći o statističkoj teoriji turbulencije.

Pojedina najnovija istraživanja ukazuju da u mnogim numeričkim meteorološkim modelima karakteristične duljine turbulentnog miješanja nisu odabrane dovoljno dobro, tj. da nisu adekvatne. Do tog zaključka se dolazi na osnovi često prevelike (ili pak premale) vertikalne difuzije u tim modelima; to onda dovodi do npr. predubokog modeliranog graničnog sloja, premalih koncentracija onečišćenja obzirom na izmjerena, itd. S druge pak strane, premale duljine turbulentnog miješanja mogu dovesti to npr. nekontroliranog hlađenja prizemnog modeliranog sloja, prevelike relativne vlažnosti i skoro stalne magle ili niske naoblake u modeliranom graničnom sloju. Budući da parametrizacije fizikalnih procesa ovise o pripadnoj rezoluciji u pojedinom numeričkom modelu, parametrizacije je potrebno redovito mijenjati, dopunjavati ili prilagođavati. Više o primjerima numeričkog modeliranja graničnog sloja se nalazi u prethodnom poglavlju skripte. O detaljima proračuna disipacije TKE uzrokovane burom vidi u Večenaj i sur. (2010).

Obukhovljeva duljina i Richardsonov fluks broj

Značajnim pojednostavljenjima što slijede u (7), te dijeljenjem s 2, dolazimo do prognostičke jednadžbe za TKE, \overline{E} , u horizontalno homogenom turbulentnom strujanju bez subsidencije i zanemarujući molekularnu viskoznost:

$$\frac{\partial \overline{E}}{\partial t} = -\overline{u'w'} \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} - \overline{v'w'} \frac{\partial \overline{v}}{\partial z} + \frac{g}{\theta} \overline{w'\theta'} - \frac{\partial}{\partial z} \left[\overline{w' \left(\frac{p'}{\rho_0} + E \right)} \right] - \varepsilon. \quad (8)$$

Izraz (8) se može bezdimenzijski prikazati dijeljenjem s $[-u_*^3/(kz)]$ i pretpostavljajući stacionarnost te prilagodbu koordinatnog sustava tako da je srednji vjetar samo niz x-os; to dovodi do:

$$0 = \overline{(u'w' \frac{\partial \overline{u}}{\partial z})} / u_*^3 - \overline{(g w' \theta')} / u_*^3 + \frac{\partial}{\partial z} \left[\overline{w' \left(\frac{p'}{\rho_0} + E \right)} \right] / u_*^3 + \varepsilon / u_*^3. \quad (9)$$

Pored spomenutih zanemarenih vremenskih varijacija, uvjetno zanemarujući transportne (redistributive) članove i disipaciju (!), odmah se javlja odnos između mehaničkog i termalnog utjecaja u (8). Nadalje, 2. član u (9) se nerjetko zapisuje kao z/L , gdje je L Obukhovljeva duljina:

$$L = -\frac{\bar{\theta}}{gk} \cdot \frac{u_*^3}{w\bar{\theta}}. \quad (10)$$

Ovdje smo u (10) još jednom usporedili mehaničke i termalne doprinose u TKE (kao i u prethodnom poglavlju spominjući L). Omjerom prvih dvaju članova u (9), ili alternativno prvih triju članova u (8), dobija se omjer uzgonskih i mehaničkih doprinosa turbulenciji, točnije TKE. To predstavlja Richardsonov fluks broj, Ri_F :

$$Ri_F = \frac{\frac{g}{w\bar{\theta}}}{\overline{u'w'} \frac{\partial u}{\partial z} + \overline{v'w'} \frac{\partial v}{\partial z}}, \quad (11)$$

gdje je minus-predznak nazivnika konvecionalno odbačen (može se naći u literaturi i s minus predznakom, no bitno je uvijek pratiti dogovor notacije i popratno tumačenje pripadnog teksta).

Nazivnik formalno sadrži 9 članova, tj. prema (7), $\overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}$, no u praksi se radi o jednom ili dva

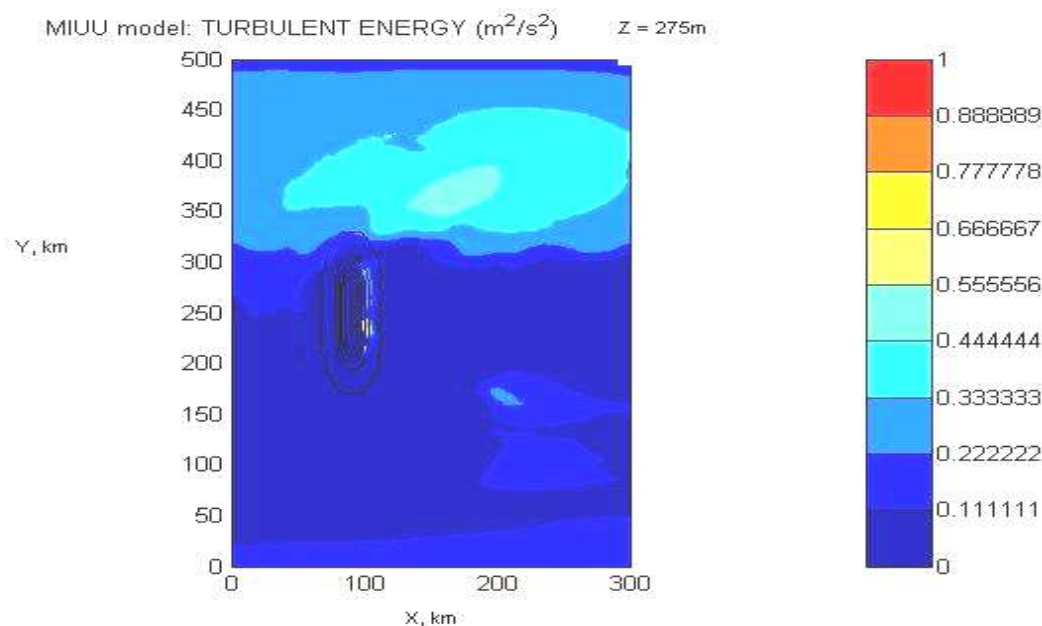
člana. Broj Ri_F , definiran kao (11), je negativan za statički nestabilno strujanje (ono je uvijek i dinamički nestabilno), $Ri_F = 0$ za neutralan tok, a za statički stabilno strujanje ovaj broj je pozitivan. Prirodno, ali i donekle naivno gledano, je da je i maksimalni teorijski $Ri_F = Ri_{F,CRIT} = 1$ ujedno i kritična vrijednost za postojanje kontinuirane turbulencije; iznad te vrijednosti, strujanje postaje laminarno jer je gušenje TKE negativnim uzgonom jače od mehaničke produkcije. Za $Ri_F < 1$, strujanje može, barem u principu, biti dinamički nestabilno. Iz (10), (11), definicije gradijentnog Richardsonovog broja Ri , Prandtlovog (turbulentnog) broja Pr , te da vrijedi u prizemnom sloju (gdje je pak turbulentna napetost prikazana K-teorijom) $\partial U/\partial z \approx u^*/kz$, $K_m \sim u^*kz$:

$$Ri_F = \frac{1}{Pr} Ri \approx z/L. \quad (12)$$

Izraz (12), koji vrijedi samo u ABL-u (jer desna strana je definirana samo za ABL, a Ri , u principu, se definira za veliku ili barem mezoskalu), iako načinjen uz niz važnih pretpostavki, pokazuje da turbulencija može postojati i pri proizvoljno velikom Ri broju, ako pri tom raste i Pr (porast Pr znači progresivno jaču turbulentnu razmjenu impulsa obzirom na toplinu – kvalitativno slično kao kod uzgonskih valova koji u prosjeku prenose impuls, ali ne i toplinu). U (12) na desnoj strani je zanemarena korekcija bezdimenzijskim funkcijama sličnosti uz z/L . Postoje indikacije u npr. Mahrtovim i Zilitinkevichevim radovima da je za $Ri \geq 0$, $Pr_{turb} \approx a + b Ri$, $0.7 \leq a \leq 1$, $0.45 \leq b \leq 4$. Na primjer, u radu Zilitinkevich i sur. (2013), na osnovi specijalnih mjerenja, LES i DNS (engl. *Large-Eddy Simulations*, *Direct Numerical Simulations*) rezultata te njihove teorije, dolaze do aproksimativne relacije da je $Pr_{turb} \approx 0.8 + 0.45 \cdot Ri$ za mali Ri (ispod njihove relacije (58)), ali za veliki Ri ovisnost se pojačava kao $d(Pr_{turb})/dRi \approx 4$, tj. veća je za red veličine nego za $0 \leq Ri \ll 1$. Iz toga odmah slijedi definitivna ograničenost Ri_F i za beskonačno veliki Ri . U vezi $Pr_{turb}(Ri)$, Mahrt i Vickers (2003) navode $Pr_{turb} \approx 1.5 + 3.08 \cdot Ri$.

Pri lokalnoj ravnoteži između mehaničke produkcije smicanjem vjetra, uzgonskom destrukcijom i disipacijom TKE-a, kritični $Ri_{F,CRIT}$ je ≈ 0.21 , a iznad te vrijednosti Kolmogorovljeva turbulencija (3D turbulencija s izraženim nagibom gustoće energije od $-5/3$ u log-zapisu) nije više podržavana. Ipak, $Ri_{F,CRIT}$ može porasti ako postoji pozitivan transport TKE pa stoga i sama turbulencija može postojati i pri jačoj, odnosno vrlo jakoj stratifikaciji.

Sličnim postupkom kao za izvod (7), postupa se za dobivanje varijance potencijalne temperature, specifične vlažnosti i skalarnih veličina, npr. polutanata (vidi kasnije). Tipično polje TKE(z,t) bit će prikazano u jednom od zadnjih poglavlja u idealiziranom slučaju strujanja zmorca, dijela obalne cirkulacije. Prije no krenemo na proračun turbulentnih kovarijanci u novom poglavlju, pokazat ćemo kako može izgledati kvazi-horizontalno polje TKE(x,y). Podsjetimo se da su pri kraju poglavlja 4 kratko diskutirani nelinearni valovi i prikazane su numeričke simulacije MIUU modelom. Ovdje se kratko vraćamo tome nastavljajući s kratkim prikazom TKE, Slika 14.1. Osnovni ABL je stabilan i stacionaran; poremećen je primarno lomom planinskih valova i sekundarno rotacijom Zemlje tako da je jače strujanje u sjevernom mlazu (zbog Coriolisovog utjecaja). U preostalom većem dijelu stabilnog PBL-a, $TKE < 0.1 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$; Ako TKE ne prelazi $\sim 0.5 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$ razumno je očekivati da je ABL blago (slabo) stabilan, mada to nije kriterij stabilnosti. Ako je $TKE > 40 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$ gotovo je sigurno da se radi o konvektivnom ABL-u. Između ovih prostora se mogu pojavljivati „blagi“ interni granični slojevi (IBL). („Oštar“ IBL se javlja nad diskontinuitetom podloge, npr. na obali.) Kasnije, u poglavlju o modeliranju, još ćemo jednom spomenuti ovaj uvjetno jednostavan numerički model.



Slika 14.1. Kao i Sl. 4.7b u poglavlju 4, ali sada za kinetičku energiju turbulencije (TKE) 275 m iznad podloge. Glavni maksimum je u zavjetrini, $y \sim 235$ do 290 km, $x \sim 105$ km, zbog pucanja planinskog vala (maksimum zbog loma valova u zavjetrini je oko $x \sim 100$ km, $y \sim 230$ km). Sekundarni maksimum je ispod sjeverne niske mlazne struje, $340 \text{ km} < y < 380 \text{ km}$, $125 \text{ km} < x < 200 \text{ km}$. Izohipse planine su prikazane crno, širina i duljina planine su oko 20 i 100 km a maksimalna visina 1 km; strujanje je s lijeva u desno konstantnim srednjim geostrofičkim vjetrom 8 m/s i stratifikacijom, $Fr = 0.67$, detalji su u Grisogono i Enger (2004).

O parametrizaciji turbulencije

Parametrizacija turbulentnih procesa u meteorološkim modelima se najčešće svodi na jednostavan opis vertikalnih turbulentnih tokova pa se to onda naziva i 'vertikalna difuzija' u pripadnim modelarskim paketima fizike modela. Pretpostavljajući da je TKE moguće dijagnosticirati, niz korisnih veličina mogu pomoći opisati turbulentno strujanje. Na primjer, karakteristična turbulentna brzina u^* je približno jednaka ili barem usporediva do na faktor 2 s $(TKE)^{1/2}$; nadalje, $K_m \approx a l_0 (TKE)^{1/2}$, gdje je a konstanta i l_0 je karakteristična duljina turbulentnog miješanja. Na ovaj način dolazimo i do pojma lokalnog ali ne i nužno prizemnog u^* , tj. $u^*(z) \approx const(TKE)^{1/2}$; ta je veličina prvenstveno korisna u stabilnom ABL-u ($const \approx O(1)$, ili malo

manje, npr. 0.5). Uz značajnu pretpostavku da se neizotropne komponente Reynoldsovih napetosti i turbulentni tok topline brzo prilagođavaju procjeni TKE, srednjeg smicanja i temperature, prethodne se mogu dijagnosticirati iz prognoze TKE, vjetra i θ pa se dobija viši red zatvaranja parametrizacije turbulencije, tzv. nivo 2.5.

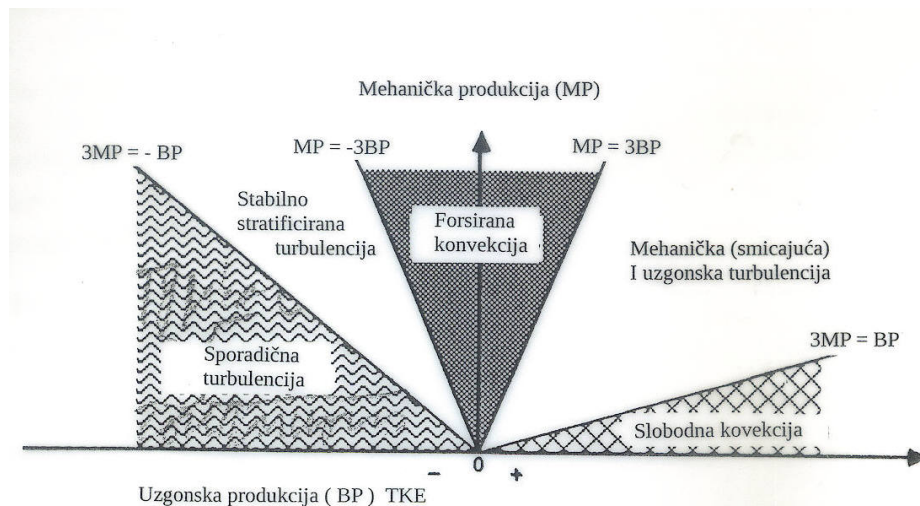
U strojarskoj mehanici fluida se umjesto nivoa 2.5 ili čak 3. nivoa često koristi tzv. TKE- ε zatvaranje parametrizacije turbulencije. To konkretno znači prognozu TKE i pripadne disipacije, dakle dvije prognostičke jedn. za turbulentne procese. Međutim, u atmosferskim strujanjima to se nije pokazalo kao optimalan pristup, već da ako se ima dovoljno računalnih resursa da je bolje ići na spomenute nivoe zatvaranja i definiranje prikladnih, dovoljno fleksibilnih dijagnostičkih duljina miješanja.

Pretpostavi li se da je TKE stacionarna i da su joj glavni ravnotežni članovi: smicanje vjetra, S , uzgon i disipacija, te da se svi mogu opisati jednostavnom K-teorijom, velikim pojednostavljenjem (8) dolazi se do

$$\begin{aligned}
 0 &= K_m S^2 (1 - Ri_f) - \varepsilon \\
 0 &\approx K_m S^2 (1 - Ri_f) - \frac{TKE^{3/2}}{l} \\
 0 &\approx K_m S^2 (1 - Ri_f) - \frac{(K_m / l)^3}{l} \\
 \Rightarrow K_m &\approx l^2 |S| \sqrt{1 - Ri_f}.
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

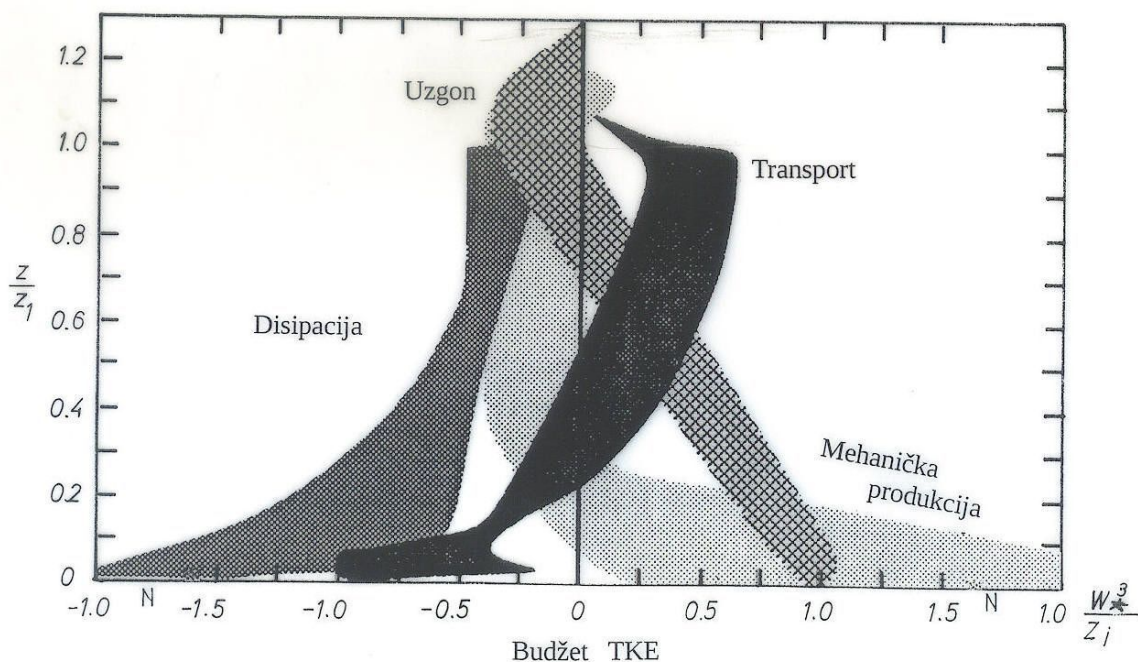
Tu vidimo da $Ri_f \leq 1$, dok nema direktnog ograničenja za gradijentni Ri .

Slika 14.2 opisuje odnos uzgona i smicanja u razvoju TKE. Uvjetno, na x -osi je mogao biti - Ri_{grad} .



Slika 14.2. Ilustracija odnosa mehaničke i uzgonske produkcije TKE. Statički nestabilni granični slojevi su na desnoj strani, dok su statički stabilni slojevi na lijevoj strani slike. Općenito, najmanje se zna o krajnje lijevoj strani slike gdje postoje vrlo statički-stabilni granični slojevi s općenito vrlo velikim Ri (gradijentni Richardsonov broj), vidi relaciju (12). Na dnu režima sporadične turbulencije, za vrlo slabo smicanje i veliki Ri , dolazi do laminarizacije strujanja.

Za kraj ovog poglavlja o varijancama turbulentnih veličina u NS i ostalim osnovnim jednadžbama, Sl. 14.3 prikazuje tipičnu bilancu TKE za konvektivni granični sloj. Sličnu bilancu za statički stabilan granični sloj je vrlo teško načiniti jer općenito, ima više vrsta ovog drugog nego prvog (konvektivnog) graničnog sloja.



Slika 14.3. Vertikalna raspodjela osnovnih članova u TKE konvektivnog graničnog sloja, vidi relacije (8) i (9). Osi su bezdimenzionalizirane karakterističnom vertikalnom turbulentnom brzinom w^* (prethodno poglavlje) i visinom inverzije z_i . (Pogrešno je napisana minimalna i maksimalna vrijednost normalizirane x-osi; ove trebaju biti -2 i 2.)

Prije nego nastavimo studiranje dinamičkih karakteristika stohastičnih, tj. turbulentnih strujanja u ABL-u idući ka potpunom 2. redu zatvaranja parametrizacijske sheme za opis turbulentnog strujanja, slijedi nekoliko općenitih napomena o (ne)izotropnoj turbulenciji te o disipaciji. Ako su turbulentne fluktuacije sasvim izotropne, tj. nemaju preferenciju smjera, onda nedijagonalni članovi Reynoldsovog tenzora napetosti moraju biti nula te $\langle u'^2 \rangle = \langle v'^2 \rangle = \langle w'^2 \rangle$. Tada su u slučaju poput npr. $u' > 0$, jednako preferirani $w' > 0$ kao i $w' < 0$. Stoga je njihov prosjek produkta $\langle u'w' \rangle = 0$ i radi se o izotropnoj turbulenciji. Tada je i vertikalni tok topline nula jer nema preferencije ka gore ili dolje (grijanje ili hlađenje odozdo). U takvom slučaju nema izvlačenja TKE iz kinetičke energije srednjeg strujanja i nema uobičajenih izvora turbulencije (mehaničke i/ili termičke produkcije). U suprotnom slučaju, spomenuti i slični produkti nisu nula (oni prvi, za impuls su tada najčešće < 0) i pripadno neizotropno polje ima polaritet.

Evidentno je da su veliki vrtlozi u turbulentnom polju neizotropni u smislu da veliki vrtlozi „osjećaju“ smjer smicanja srednjeg vjetra, ili/i gradijent srednje gustoće ili potencijalne temperature. Da bi se turbulencija održala protiv viskozne disipacije, mora se razviti neizotropija (tj. rastezanje vrtloga). Vrtlozi orijentirani niz osnovnu os smicanja vjetra (ako je $dU/dz > 0$, onda su takvi vrtložni filamenti postavljeni u prosjeku odozdo lijevo ka gore desno u dijagramu $(U(z), z)$ će se rastezati, jačati i pokazivati $\langle u'w' \rangle < 0$. Na takav način mehaničko međudjelovanje u generiranju TKE-a je pozitivno, tj. $-\langle u'w' \rangle dU/dz > 0$ u (7) ili (8). Ovakvi vrtlozi izvlače energiju iz osnovnog strujanja. I suprotno, vrtlozi postavljeni približno okomito na smjer osnovnog smicanja će se sažimati, slabiti i imati $\langle u'w' \rangle > 0$.

15. PROGNOŠTIČKA JEDNADŽBA ZA KOVARIJANCE, viši nivoi „zatvaranja“

Da bismo došli do prognostičke jednađbe za turbulentni tok impulsa, tj. usrednjeno ($u_i' u_k'$), potrebno je opet izmanipulirati jednađbu gibanja slično kao u prethodnom poglavlju. Ponovno pretpostavljamo da je fluid hidrostatičan, da za njega vrijedi Boussinesqova aproksimacija, te da se brzina može napisati u obliku Reynoldsovog zbroja srednje vrijednosti i fluktuacije ($u = \bar{u} + u'$). Kad se od NS jednađbe gibanja, napisane uvažavajući gore navedene pretpostavke, oduzme srednje stanje, ostaje prognostička jednađba za udar vjetra; ista jedn. izvedena je u Pogl. 14, jedn. (3):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i'}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + u_j' \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + u_j' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} = \\ - \left(\frac{1}{\rho} \right) \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \delta_{i3} \left(\frac{\Theta_v'}{\Theta_v} \right) g + f_c \varepsilon_{ij3} u_j' + \nu \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j^2} + \frac{\partial (\overline{u_i' u_j'})}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (1)$$

Relacija (1) je polazna jednađba u rješavanju problema ovog poglavlja. Jednađbu (1) množimo s u_k' te na nju primjenjujemo Reynoldsovo usrednjavanje:

$$\begin{aligned} \overline{u_k' \frac{\partial u_i'}{\partial t}} + \overline{u_k' \bar{U}_j \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}} + \overline{u_k' u_j' \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j}} + \overline{u_k' u_j' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}} = \\ - \overline{\left(\frac{u_k'}{\rho} \right) \frac{\partial p'}{\partial x_i}} + \delta_{i3} \overline{u_k' \left(\frac{\Theta_v'}{\Theta_v} \right) g} + f_c \varepsilon_{ij3} \overline{u_k' u_j'} + \nu \overline{u_k' \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j^2}}, \end{aligned} \quad (2)$$

gdje je zadnji član iz (1) pomnožen s u_k' , kao što je rečeno, i usrednjen, pa to daje nulu i onda pripadnog člana više nema u (2). Analogno se može napisati nova jednađba koju dobivamo zamjenom indeksa i i k u jednađbi (2):

$$\begin{aligned} \overline{u_i' \frac{\partial u_k'}{\partial t}} + \overline{u_i' \bar{U}_j \frac{\partial u_k'}{\partial x_j}} + \overline{u_i' u_j' \frac{\partial \bar{U}_k}{\partial x_j}} + \overline{u_i' u_j' \frac{\partial u_k'}{\partial x_j}} = \\ - \overline{\left(\frac{u_i'}{\rho} \right) \frac{\partial p'}{\partial x_k}} + \delta_{k3} \overline{u_i' \left(\frac{\Theta_v'}{\Theta_v} \right) g} + f_c \varepsilon_{kj3} \overline{u_i' u_j'} + \nu \overline{u_i' \frac{\partial^2 u_k'}{\partial x_j^2}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Gornje dvije jednađbe (2) i (3) zbrajamo, uvažavajući pravila produkta kao što je npr.

$$\overline{u_k' \bar{U}_j \frac{\partial u_i'}{\partial x_j}} + \overline{u_i' \bar{U}_j \frac{\partial u_k'}{\partial x_j}} = \bar{U}_j \frac{\partial \overline{u_i' u_k'}}{\partial x_j} = \frac{\partial (\bar{U}_j \overline{u_i' u_k'})}{\partial x_j} :$$

$$\begin{aligned}
& \overline{\frac{\partial u_i' u_k'}{\partial t}} + \overline{U_j} \frac{\partial \overline{u_i' u_k'}}{\partial x_j} + \overline{u_i' u_j'} \frac{\partial \overline{U_k}}{\partial x_j} + \overline{u_k' u_j'} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} + \overline{u_j'} \frac{\partial \overline{u_i' u_k'}}{\partial x_j} = \\
& \delta_{k3} u_i' \left(\frac{\Theta_v'}{\Theta_v} \right) g + \delta_{i3} u_k' \left(\frac{\Theta_v'}{\Theta_v} \right) g + f_c \varepsilon_{kj3} \overline{u_i' u_j'} + f_c \varepsilon_{ij3} \overline{u_k' u_j'} \\
& - \left(\frac{\overline{u_i'}}{\rho} \right) \frac{\partial \overline{p'}}{\partial x_k} - \left(\frac{\overline{u_k'}}{\rho} \right) \frac{\partial \overline{p'}}{\partial x_i} + \overline{v u_i'} \frac{\partial^2 \overline{u_k'}}{\partial x_j^2} + \overline{v u_k'} \frac{\partial^2 \overline{u_i'}}{\partial x_j^2}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Da bismo dobili uobičajeni oblik jednadžbe, u izrazu (4) ćemo napraviti neke izmjene. Dodati ćemo član $u_i' u_k' \frac{\partial u_j'}{\partial x_j} = 0$. To je usrednjeni produkt kovarijance komponenta brzine s nestlačivim kontinuitetom, a kako je ukupna divergencija strujanja ovdje jednaka nuli, taj faktor ne mijenja ništa. Član koji ovisi o tlaku raspisat ćemo kao:

$$\overline{u_k' \frac{\partial p'}{\partial x_i}} = \frac{\partial (\overline{p' u_k'})}{\partial x_i} - \overline{p' \frac{\partial u_k'}{\partial x_i}}.$$

Viskozni član ćemo također preurediti:

$$\overline{v u_i' \frac{\partial^2 u_k'}{\partial x_j^2}} + \overline{v u_k' \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j^2}} = v \frac{\partial^2 \overline{u_i' u_k'}}{\partial x_j^2} - 2v \frac{\partial \overline{u_i'}}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{u_k'}}{\partial x_j}.$$

Uvažavajući ove promjene, dobivamo konačnu prognostičku jednadžbu za turbulentni tok impulsa (kovarijancu):

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial (\overline{u_i' u_k'})}{\partial t} + \overline{U_j} \frac{\partial \overline{u_i' u_k'}}{\partial x_j} = - \underbrace{(\overline{u_i' u_j'})}_{(1)} \frac{\partial \overline{U_k}}{\partial x_j} - \underbrace{(\overline{u_k' u_j'})}_{(2)} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} - \underbrace{\frac{\partial (\overline{u_i' u_j' u_k'})}{\partial x_j}}_{(3)} + \left(\frac{g}{\Theta_v} \right) \left[\delta_{k3} \overline{u_i' \Theta_v'} + \delta_{i3} \overline{u_k' \Theta_v'} \right] + \\
& f_c \left[\varepsilon_{kj3} \overline{u_i' u_j'} + \varepsilon_{ij3} \overline{u_k' u_j'} \right] - \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial (\overline{p' u_k'})}{\partial x_i} + \frac{\partial (\overline{p' u_i'})}{\partial x_k} - \overline{p' \left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k'}{\partial x_i} \right)} \right] + v \frac{\partial^2 (\overline{u_i' u_k'})}{\partial x_j^2} - 2v \frac{\partial \overline{u_i'}}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{u_k'}}{\partial x_j}.
\end{aligned} \tag{5a}$$

Diskutirajmo ovu zahtjevnu jedn. (5a), najkompleksniju u cijeloj skripti. Ona objedinjuje osnove determinizma nelinearne dinamike NS jednadžbi sa striktno stohastičkim procesima, konkretno – iznosima i gradijentima kovarijanci turbulentnih fluktuacija polja brzine. U dobivenoj jednadžbi (5a) pojedini članovi imaju sljedeća značenja:

- (1) - lokalna promjena toka turbulentnog impulsa,
- (2) - advekcija toka impulsa srednjim vjetrom,
- (3) - stvaranje toka impulsa međudjelovanjem smicanja srednjeg vjetra i postojećeg toka impulsa,
- (4) - transport toka impulsa turbulentnim gibanjem (turbulentna preraspodjela),
- (5) - uzgonsko stvaranje ili uništavanje turbulentnog toka impulsa,
- (6) - Coriolisovo „raspršenje“ odnosno sporo vrtloženje turbulentnog toka impulsa,
- (7) - transport 'kvazi-difuzijom' tlaka,
- (8) – transport/preraspodjela toka impulsa zbog tendencije povratka u izotropnu turbulenciju, tj. preraspodjela fluktuacijama tlaka u neizotropnom turbulentnom polju brzine.

(9) - molekularna (viskozna) difuzija turbulentnog toka impulsa,

(10) - viskozna disipacija turbulentnog toka impulsa; radi skraćivanja ga pišemo kao $2\varepsilon_{u_i u_k}$.

Naglasimo da su dinamička značenja pojedinih članova u (5) slična onima u prethodnom poglavlju kod tamošnjeg izraza (7). Skalnom analizom i mjerenjima se utvrđuje da su članovi (6), (7) i (9) najčešće znatno manji od ostalih. Na primjer, 7. član u (5a) se ponekad može parametrizirati K-teorijom. To znači da $\overline{(p'u'_k)} \sim -K_p \partial P / \partial x_k$, gdje je K_p koeficijent difuzije turbulentne razmjene za tlak; ovaj član se pojavljuje 'poprečno diferenciran' u (5a) i to ga dodatno čini malim (jer mali je $\partial^2 P / (\partial x_k \partial x_i)$, dok se K_p vjerojatno sporo mijenja u prostoru i vremenu jer su zvučni i zvučno-uzgonski doprinosi isključeni) obzirom na ostale doprinose u (5a). Nadalje, za očekivati je da u atmosferi među ovakvim članovima dominira $\overline{(p'w')}$, tj. $-K_p \partial P / \partial z$, pa je i za očekivati da takav član najčešće ima vrlo malu zakrivljenost, $\partial^2 P / \partial z^2$. Zadnji član sam po sebi treba biti pozitivan (dajući negativan doprinos u (5)), jer ako se u j -tom smjeru pojačavaju (ili slabe) fluktuacije jedne komponente brzine, isto treba vrijedjeti za drugu pripadnu komponentu. Zanemarivanjem (ili nepoznavanjem!?) spomenutih članova, u jednadžbi (5a) preostaje:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{(u'_i u'_k)}}{\partial t} + \overline{U_j} \frac{\partial \overline{(u'_i u'_k)}}{\partial x_j} = & - \overline{(u'_i u'_j)} \frac{\partial \overline{U_k}}{\partial x_j} - \overline{(u'_k u'_j)} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{(u'_i u'_j u'_k)}}{\partial x_j} + \left(\frac{g}{\Theta_v} \right) \left[\delta_{k3} \overline{u'_i \Theta'_v} + \delta_{i3} \overline{u'_k \Theta'_v} \right] + \\ & + \frac{p'}{\rho} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u'_k}{\partial x_i} \right) - 2\varepsilon_{u_i u_k} \end{aligned} \quad (5b)$$

Relacija (5b) zapravo predstavlja devet odvojenih jednadžbi i može poslužiti za prognozu svih 9 članova u Reynoldsovom tenzoru napetosti; budući da je to simetrični tenzor, postoji svega 6 različitih članova u njemu. Kad se indeksi poistovjete i načini se zbroj, dobijemo trag tenzora; pripadnu smo polovicu izračunali slično kao (5), vidi prethodno poglavlje o proračunu TKE.

Slično se računaju tokovi potencijalne (virtualne) temperature, odnosno topline i to čini kompletan 2. red zatvaranja sheme parametrizacije turbulencije. Na osnovi njega bismo započeli raspisivanje i 3. reda; npr. neusrednjeni (5b) bismo pomnožili s u'_j , i pribrojili bismo mu prognostičku jedn. za istu komponentu pomnoženu s $(u'_i u'_k)$. Onda bismo proveli usrednjavanje i rezultat bi bio prognoza za usrednjeni $(u'_j u'_i u'_k)$, a ovaj bi sadržavao u sebi i divergenciju kvadrupolnih (četveročlanih) korelacija. Kvadrupolne članove bismo onda ili parametrizirali na osnovi poznatih polja 1., 2. i 3. reda (srednje strujanje, tokovi i tokovi tokova), ili bismo i za njih napisali prognostičke jedn. (od više desetaka članova) koje bi sadržavale kvintet-korelacije, tj. statističke momente 5. reda, i tako u beskonačnost. Dobra je vježba napisati prognostički izraz za npr. srednjak $(\theta'_i u'_k)$, ili slično za vertikalni turbulentni tok specifične vlažnosti, te diskutirati prikladna pojednostavljenja poput pretpostavke o horizontalnoj homogenosti turbulentnih polja (koji članovi tada nestaju?).

Prikladno pojednostavljenje od (5) dobija se pretpostavljajući horizontalnu homogenost, prilagođavajući koordinatni sustav da ide niz srednji vjetar te zanemarujući supsidenciju i srednje vertikalno dizanje zraka. U tom slučaju je vertikalni tok horizontalnog turbulentnog impulsa jednak

$$\frac{\partial(\overline{u'w'})}{\partial t} = -(\overline{w'^2})\frac{\partial\overline{U}}{\partial z} - \frac{\partial(\overline{u'w'^2})}{\partial z} + \left(\frac{g}{\Theta_v}\right)\left[\overline{u'\Theta'_v}\right] + \frac{p'}{\rho}\left(\frac{\partial u'}{\partial z}\right) - 2\varepsilon_{uw}. \quad (5c)$$

Ovdje se konkretnije vidi koje značenje ima pojedini član na desnoj strani a sasvim u skladu s maloprijašnjim tumačenjem: 1. član na desnoj strani je međudjelovanje varijance vertikalne fluktuacije sa srednjim smicanjem vjetra, 2. član je turbulentni transport turbulentnog toka („turbulentna difuzija“), 3. član je tok zbog međudjelovanja fluktuacija horizontalne komponente brzine s fluktuacijama uzgona, 4. član predstavlja preraspodjelu toka turbulentnog impulsa zbog fluktuacija tlaka i neizotropnog fluktuirajućeg polja brzine i 5. član je viskozna disipacija vertikalnog turbulentnog toka horizontalnog impulsa. Predzadnji član, prije pojednostavljenja, povezan s turbulentnim fluktuacijama tlaka i brzine, itd. se često puta razdvaja na članove povratka u izotropiju, te na rapidne članove koji opisuju međudjelovanja između turbulentnih i srednjih polja strujanja. Polovica zadnjeg člana u (5c) je jednaka $\varepsilon_{uw} = \langle v(\partial u'/\partial z)(\partial w'/\partial z) \rangle$, gdje je Reynoldsovo usrednjavanje opet prikazano kao $\langle \rangle$ (umjesto crte iznad izraza); ako u' fluktuacije rastu visinom, onda to mora u prosjeku biti popraćeno i porastom w' fluktuacija i obrnuto. Slično vrijedi i općenito za ostale smjerove i druge odabire komponenata brzine u (5a) i (5b).

Uzgonski član u (5c) je češće negativan u konvektivnom strujanju i time pojačava najčešće negativan član vertikalnog prijenosa horizontalnog turbulentnog impulsa na lijevoj strani. Obrnuto je u stabilno stratificiranom strujanju gdje je uzgonski član češće pozitivan i na taj način smanjuje negativan član na lijevoj strani.

Za poznavanje slučajnog polja (strujanja) potrebno je poznavati sve statističke momente (kovarijance svih redova) tog polja. Ovih momenata ima u principu beskonačno. Srećom pa najčešće momenti nakon nekog reda (npr. 3.) progresivno doprinose sve manje opisu ukupnog polja te se mogu zanemariti, ili povezivati u kombinacije s postojećim nižim momentima. Već smo prije rekli da je ovo nereducibilni sustav jedn.; stoga, Reynoldsovo usrednjavanje i problem zatvaranja parametrizacije turbulentnih tokova vjerojatno nije najbolji način tretiranja turbulencije u fluidima. Ipak, za sada, ovo je izgleda najefikasniji pristup proračunu turbulentnih efekata na ukupno strujanje. U osnovi mi pretpostavljamo da su bitne osobine turbulentnih polja strujanja opisane relativno niskim redom kovarijanci pripadnih polja. Konkretno, to znači da pretpostavljamo da se npr. pomoću TKE, tj. polovice traga Reynoldsovog tenzora turbulentnih napetosti, može opisati dominantan efekt turbulencije na razvoj strujanja a da ostale korelacije uglavnom mogu biti dijagnostičirane iz TKE, dok se viši redovi kovarijanci zanemaruju. Opravdanost tih pretpostavki za pojedina strujanja je rijetko provjeravana.

Turbulentni tokovi ostalih polja

Kao što je već bilo spomenuto, ostale prognostičke jednadžbe za varijance i kovarijance turbulentnih polja se izvode analogno kao pri izvodu (5), tj. slično kao u prošlom poglavlju izvod za (7). Nadalje, tumačenje pojedinih članova u tim izrazima je slično kao u dosadašnjem tumačenju pripadnih članova i njihovih interakcija. Na primjer, varijanca za specifičnu vlažnost se dobija iz pripadnog izraza za prognozu fluktuacije od q , tj q' :

$$\frac{\partial q'}{\partial t} + \overline{U_j} \frac{\partial q'}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial \overline{q}}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial q'}{\partial x_j} = +v_q \frac{\partial^2 q'}{\partial x_j^2} + \frac{\partial(\overline{q'u'_j})}{\partial x_j}, \quad (6)$$

Gdje je ν_q molekularna kinematička difuzivnost za specifičnu vlažnost. Množenjem (6) s $2q'$, Reynoldsovim usrednjavanjem i uvođenjem pripadne molekularne disipacije ε_q dobija se

$$\frac{\partial \overline{q'^2}}{\partial t} + \overline{U_j} \frac{\partial \overline{q'^2}}{\partial x_j} = -2\overline{q'u'_j} \frac{\partial \overline{q}}{\partial x_j} - \frac{\partial \left(\overline{u'_j q'^2} \right)}{\partial x_j} - 2\varepsilon_q, \quad (7)$$

gdje opet pojedini članovi na desnoj strani imaju redom značenje: produkcija varijance međudjelovanjem toka vlažnosti s gradijentom srednjeg polja vlažnosti, turbulentna preraspodjela već postojećih i u prostoru nejednolikih varijanci vlažnosti te disipacija:

$$\varepsilon_q \equiv +\nu_q \left(\overline{\frac{\partial q'}{\partial x_j}} \right)^2.$$

Pripadno pojednostavljenje od (7) se dobija uz pretpostavke iznad (5c).

Analognim se postupkom računa i varijanca fluktuacije potencijalne temperature; konačan rezultat je

$$\frac{\partial \overline{\theta'^2}}{\partial t} + \overline{U_j} \frac{\partial \overline{\theta'^2}}{\partial x_j} = -2\overline{\theta'u'_j} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_j} - \frac{\partial \left(\overline{u'_j \theta'^2} \right)}{\partial x_j} - 2\varepsilon_\theta - \frac{2}{\rho_0 C_p} \left(\overline{\frac{\partial R'_j}{\partial x_j}} \theta' \right)$$

gdje su tumačenja slična prijašnjima, a zadnji član na desnoj strani predstavlja kovarijancu s divergencijom fluktuacije radijacionih doprinosa.

Tok specifične vlažnosti se dobija slično kao (5) ali nešto jednostavnije. Rezultat je

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{(u'_j q')}}{\partial t} + \overline{U_j} \frac{\partial \overline{(u'_j q')}}{\partial x_j} = & -\overline{(q' u'_j)} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} - \overline{(u'_i u'_j)} \frac{\partial \overline{q}}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{(u'_i u'_j q')}}{\partial x_j} + \left(\frac{g}{\Theta_v} \right) \left[\overline{\delta_{i3} q' \Theta'_v} \right] + \\ & + \frac{1}{\rho} \left[\overline{\frac{p' \partial q'}{\partial x_i}} \right] - 2\nu_q \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial q'}{\partial x_j}} \end{aligned} \quad (8a)$$

dok je tumačenje pojedinih članova u (8a) slično kao i u prethodnim izrazima; zbog jednostavnosti je pretpostavljeno da su koeficijent viskoznosti za impuls i specifičnu vlažnost isti. Napomenimo da u (8a) prva 2 člana na desnoj strani nisu nužno pozitivni (primijetite im malo različitu strukturu u usporedbi s prijašnjim sličnim članovima, poput npr. člana mehaničke produkcije). Pripadno pojednostavljenje od (8a) se dobija uz pretpostavke iznad (5c) i to dovodi do

$$\frac{\partial \overline{(q' w')}}{\partial t} = -\overline{(w'^2)} \frac{\partial \overline{q}}{\partial z} - \frac{\partial \overline{(q' w'^2)}}{\partial z} + \left(\frac{g}{\Theta_v} \right) \left[\overline{q' \Theta'_v} \right] + \frac{p'}{\rho} \left(\frac{\partial q'}{\partial z} \right) - 2\varepsilon_{qw}. \quad (8b)$$

Opet, tumačenje pojedinih članova je slično kao i u svim prethodnim izrazima. Lokalna promjena vertikalnog turbulentnog toka (specifične) vlažnosti je uzrokovana: 1. interakcijom vertikalnog gradijenta srednje vlažnosti i varijance vertikalne brzine (tj. dvostrukog vertikalnog doprinosa gibanja u TKE), 2. vertikalnom komponentom turbulentne preraspodjele fluktuacija vlažnosti („turbulentna difuzija“, ovakvi članovi kad se integriraju od dna do vrha graničnog sloja ili atmosfere daju nulu); 3. interakcijom s fluktuacijama uzgona, 4. preraspodjelom i transportom zbog interakcije fluktuacija tlaka i vertikalne komponente gradijenta fluktuacije vlažnosti („povratak u izotropiju“) i 5. viskozne disipacije.

Tok topline po jedinici volumena fluida (zraka), točnije potencijalne temperature, se izvodi slično kao i turbulentni tok vlažnosti. Naknadno zanemarujući Coriolisov efekt, dio efekta tlaka (tzv. 'difuzije tlakom') i molekularnu difuziju (za kompletan izvod vidi npr. Stull, 1988, str. 142-144, mada postupak mora biti sasvim jasan na osnovi dosadašnjih izvoda u ovom poglavlju), dobija se

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\overline{u_i'\theta'})}{\partial t} + \overline{U_j} \frac{\partial \overline{u_i'\theta'}}{\partial x_j} = & -(\overline{\theta' u_j'}) \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} - (\overline{u_i' u_j'}) \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_j} - \frac{\partial(\overline{u_i' u_j' \theta'})}{\partial x_j} + \left(\frac{g}{\Theta_v}\right) [\delta_{i3} \overline{\theta' \theta'_v}] + \\ & + \frac{1}{\rho} \left[\overline{p' \frac{\partial \theta'}{\partial x_i}} \right] - 2\varepsilon_{u_i\theta} \end{aligned} \quad (9a)$$

$$\varepsilon_{u_i\theta} \equiv \overline{v_\theta' \frac{\partial u_i'}{\partial x_j} \frac{\partial \theta'}{\partial x_j}},$$

naravno, tumačenje članova je slično kao i prije uključujući molekularnu difuzivnost. Tipovi članova poput predzadnjeg u (9) ponekad se nazivaju dekorrelacijski članovi tlaka, zbog međudjelovanja tlaka i temperature (odnosno brzine u drugim jednadžbama, npr. (5c), (8) i (10)). Disipacija $\varepsilon_{u_i\theta}$ je opet nužno pozitivna veličina; u ovom slučaju je to posljedica činjenice da ako se u nekom smjeru x_j smanjuju jedne fluktuacije, npr. neke komponente brzine, u prosjeku se onda moraju smanjivati i pripadne turbulentne fluktuacije i nekog drugog turbulentnog polja, npr. temperature. Vrijedi i obrnuto, ako spomenute fluktuacije jednog polja rastu u danom smjeru, onda u prosjeku rastu i fluktuacije drugog pripadnog turbulentnog polja; jednostavno, drugo polje se pri disipaciji ponaša kao pasivni marker („sluga“ strujanju). Uz uobičajene pretpostavke horizontalne homogenosti i nepostojanja supsidencije ili srednjeg dizanja zraka, (9a) se pojednostavljuje jer nestaju dva tipa članova, dok se ostali smanjuju na po jednu pripadnu komponentu:

$$\frac{\partial(\overline{\theta' w'})}{\partial t} = -(\overline{w'^2}) \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial z} - \frac{\partial(\overline{\theta' w'^2})}{\partial z} + \left(\frac{g}{\Theta_v}\right) [\overline{\theta' \Theta'_v}] + \frac{p'}{\rho} \left(\frac{\partial \theta'}{\partial z}\right) - 2\varepsilon_{\theta w}. \quad (9b)$$

Opet prepoznamo analogiju (9b) i (8b); ovdje je sad u pitanju vertikalni tok topline a u (8b) se radilo o vertikalnom toku specifične vlažnosti. Pripadni članovi u (9b) imaju korespondentno tumačenje kao i oni redom u (8b). Ponekad se u modeliranju ovih članova pokušava povezati članove tipa turbulentne preraspodjele i preraspodjele tlakom ('turbulentna difuzija', ili 'tok tokova' te 'povratak u izotropiju') u jedan zajednički redistributivni član koji bi bio brzo-difuzivne prirode.

Na ekvivalentan način se izvodi prognostički izraz za turbulentni fluks skalarnih fluktuacija c' kao što je to bio za (8) ili (9). Tako se dobija:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\overline{u_i'c'})}{\partial t} + \overline{U_j} \frac{\partial(\overline{u_i'c'})}{\partial x_j} = & -(\overline{c'u_j}) \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} - (\overline{u_i'u_j}) \frac{\partial \overline{C}}{\partial x_j} - \frac{\partial(\overline{u_i'u_j'c'})}{\partial x_j} + \\ & + \left(\frac{g}{\Theta_v} \right) \left[\overline{\delta_{i3} c' \theta'_v} \right] + \frac{1}{\rho} \left[\overline{p' \frac{\partial c'}{\partial x_i}} \right] - 2\varepsilon_{u_i c} \end{aligned} \quad (10)$$

gdje su članovi i značenja ekvivalentni onima u npr. (8b) ili (9b). Isto se izvodi pojednostavljenje za npr. vertikalni tok turbulentnih fluktuacija skalara u horizontalno homogenom polju turbulentnog strujanja.

Za sličan proračun turbulentnog toka uzgona postupa se isto kao i do sada uz posebnu napomenu koja se odnosi na efekt omjera miješanja na virtualnu temperaturu. Budući da je virtualna potencijalna temperatura približno jednaka $\theta_V \approx \theta(1 + 0.61r_{wV})$, gdje je r_{wV} omjer miješanja vodene pare u zraku, pripadni vertikalni turbulentni tok $\overline{w'\theta'_v}$ ima doprinose i od korelacija fluktuacije vertikalne brzine i pripadnog omjera miješanja.

Često puta se u operativnim meteorološkim modelima prognozira samo TKE, tj. trag matrice Reynoldsovih napetosti, dok se ostale napetosti i vektori toka temperature i specifične vlažnosti računaju dijagnostički. To je spomenuti tzv. „2.5 nivo“ višeg reda zatvaranja parametrizacije turbulencije i on za sve ostale kovarijance pretpostavlja algebarske (dijagnostičke) relacije. Pri tome, valja imati na umu da su takvi modeli ograničeni na sasvim turbulentne granične slojeve i relativno slabe gradijente tlaka (tzv. ravnotežna turbulencija). Takvi modeli imaju ozbiljne slabosti pri modeliranju ABL-a s promjenom smjera gradijenta tlaka, što se npr. događa oko rotora pri separaciji ABL-a. Stoga, takvi modeli nisu prikladni za opis neravnotežne i nestacionarne turbulencije (iako se koriste i u takvim situacijama). Za općenitije modeliranje turbulencije, što uključuje ubrzanje i kočenje u ABL-u, jaku zakrivljenost, separaciju i/ili ponovno povezivanje strujanja („*separation, reattachment*“), potrebno je imati više prognostičkih jedn. za momente turbulencije.

Sve do sada spomenute korelacije turbulentnih fluktuacija su bile računate za pojedinu proizvoljnu točku u polju turbulentnog strujanja. Proučavani su pojedini tenzori tj. višestruke korelacije fluktuacija u pojedinoj točki strujanja (*'single-point modeling'*). U N-dimenzijском prostoru to dovodi do N-komponenta brzine u pojedinoj točki strujanja. Vjerojatno je bolje (ali i kompliciranije!) proučavati turbulentne korelacije u dvije ili više točaka (*'two-point modeling'*). U tom slučaju treba prognozirati drugačije tenzore, npr. treba izračunati $\partial \langle u_i'(\mathbf{r}) u_k'(\mathbf{r}+\mathbf{p}) \dots \rangle / (\partial t)$ u većini točaka u strujanju (masno, *'bold'* su napisani vektori položaja \mathbf{r} i \mathbf{p}). Pripadni račun za dvije točke vodi do prognoze tzv. strukturne funkcije strujanja. Meteorologija je još daleko od primjene ove teorije u praksi i modeliranju detaljnog stvarnog strujanja u prirodi.

Razlikovanje turbulencije od valova

Prijenos TKE-a i ostalih viših turbulentnih momenata uglavnom slijedi na određeni način osnovni vjetar, za razliku od npr. uzgonskih valova čiji paketi i pripadna energija putuju grupnom brzinom (dok njihove „slike“ idu faznom brzinom). Budući da se turbulencija i uzgonski valovi mogu preklopiti u frekventnoj domeni, donekle (ali bitno manje) i u prostornoj domeni valnih brojeva, upravo su ispred spomenute razlike u turbulentnim i valnim osobinama one koje pomažu u mjerenjima razlučiti koji je čiji signal.

Kovarijance između tlaka i brzine vjetra su različite za turbulenciju i uzgonske valove. Najčešće su fluktuacije tlaka zbog turbulencije povezane s kvadratom fluktuacija vjetra, poput $\partial_x p \sim -\rho_0 \partial_z \langle u'w' \rangle$. S druge strane, naučili smo prije o valovima da su im pripadne varijacije tlaka povezane linearno s varijacijama vjetra, tj. $\tilde{p} \sim -\rho_0 \bar{U} \tilde{u}$. Nadalje, budući da se uzgonski valovi općenito pojavljuju u paketima, a turbulencija je neperiodična, različite statističke tehnike valića (obrada podataka) mogu biti prikladne metode separacije valnih od turbulentnih osobina strujanja.

U analizi finih mjerenja koja sadržavaju i neturbulentne signale, valja pokušati izdvojiti koherentne strukture (signale) koje se često puta karakterizirane negaussovskim raspodjelama i dugotrajnim korelacijama. Pri tome, nekoherentne komponente strujanja najčešće imaju gaussovsku statistiku i kratkotrajne korelacije. U takvim analizama važni statistički aparati su metoda valića (*wavelet*) i Hilbert-Huangova transformacija (npr. Petrov, 2016). Nekoliko većih valićnih koeficijenata predstavljati će koherentne strukture strujanja, dok će puno malih valićnih koeficijenata biti povezani s nekoherentnom, stohastičnom pozadinom strujanja, bez strukture i s približno ekviparticijom u spektru.

Idealizirani slučaj jednostavne difuzije

Privremeno napuštamo uobičajenu teoriju turbulencije. U nekim posebnim, vrlo idealiziranim situacijama može se dogoditi da procesi prijenosa impulsa, a pogotovo temperature ili nekog pasivnog markera, mogu biti dominirani isključivo vrtložnom difuzijom. U takvim slučajevima se najčešće koristi K-teorija za parametrizaciju turbulentnog toka, pa npr. jednažba za srednju koncentraciju $C(z,t)$, ili temperaturu $T(z,t)$, i sl. u takvom pojednostavljenom 1D slučaju postaje od:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{\text{turbulenta advekcija}} = -\frac{\partial \overline{[u_j' T']}}{\partial x_j}, \quad (11a)$$

koristeći K-teoriju i pretpostavku o horizontalnoj homogenosti (11a) približno postaje:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{\text{vert. adv.}}^{\text{turb.}} = \frac{\partial}{\partial z} \left(K(z,t) \frac{\partial T}{\partial z} \right), \quad (11b)$$

gdje se $K(z,t)$ treba proračunavati na osnovi neke odabrane parametrizacije. Ako se koristi parametrizacija višeg reda zatvaranja sheme za turbulentne procese, tj. ako je dostupna npr. procjena TKE , onda se K može izračunati kao $K \approx a \mathcal{L} (TKE)^{1/2}$, gdje je konstanta $a \sim O(1)$ i \mathcal{L} je turbulentna duljina miješanja. Koristimo li 1. red zatvaranja turbulentne sheme, onda se K može računati lokalno kao npr. $K \approx b \mathcal{L}^2 |\partial U / \partial z|$, gdje je konstanta $b \sim O(1)$. Alternativno, moguće je ponekad pretpostaviti zadani profil za K , tj. koristiti nelokalnu parametrizaciju 1. reda (npr. Grisogono, 1995, 2003). U takvom je slučaju potrebno procijeniti određene 'vanjske' parametre za K , npr. maksimalnu vrijednost, $\max(K)$, i pripadnu visinu [npr.

$K(z) = K_{\max} \sqrt{e} \frac{z}{h} \exp\left(-\frac{z^2}{2h^2}\right)$]. Budući da uobičajena K-teorija ne može uvažiti efekte svih

dominantnih turbulentnih vrtloga, ponekad se pokušavaju ovi tretirati integralnim efektima zadanim npr. odabranom funkcijom $K(z)$ koja ne ovisi (samo) o lokalnim meteorološkim parametrima. To je onda nelokalna parametrizacija. Naravno, niti ova nije dovoljno kompletna i ima nedostatke jer je teško unaprijed znati spomenutu ovisnost za sve tipove graničnih slojeva.

Mi ćemo riješiti (11) u vrlo idealiziranom netrivialnom obliku kada je $K = const$. U slučaju da je promatrani prostor ograničen, (11) se jednostavno rješava razvojem $T(z,t)$ u Fourierov red, problem se svodi na obične diferencijalne jednadžbe i proračun Fourierovih komponenata na osnovi rubnih uvjeta. No, pretpostavimo da je prostor polu-beskonačan, tj. $0 \leq z < \infty$. Zadaimo rubne uvjete: $T(0, t) = T_0 = const$, $T(z \rightarrow \infty, t) = T_\infty$. Tada nema određene karakteristične duljine H za procjenu karakteristične vertikalne skale, već se očekuje da su svi profili $T(z,t)$ međusobno slični. [Vrijeme bi se onda, u principu, moglo skalirati kao $\tau \sim (H^2/K)$, samo kad bi H bio dostupan (što nije slučaj)]. Koristiti ćemo tzv. metodu sličnosti (metoda može vrijediti i za nelinearne jednadžbe). Definiramo bezdimenzijsku varijablu $\eta \equiv z/(K t)^{1/2}$; u tom slučaju (11) uz $K = const$, postaje:

$$-\frac{\eta}{2t} \frac{dT}{d\eta} = \frac{1}{t} \frac{d^2T}{d\eta^2}. \quad (12a)$$

Ovo je sada postala obična diferencijalna jedn. koju množimo s t ; jednom integriramo (12a) pa dobijamo

$$\frac{dT}{d\eta} = T_1 \exp\left(-\frac{\eta^2}{4}\right),$$

integrirajući još jednom, dobija se

$$T = T_1 \int_0^{z/\sqrt{Kt}} \exp\left(-\frac{\eta^2}{4}\right) d\eta + T_2, \quad (12b)$$

gdje su T_1 i T_2 konstante integracije. Primjenjujući donji rubni uvjet, dobija se $T_2 = T_0$; gornji rubni uvjet u beskonačnosti daje vrijednost integrala u (12b) i prve konstante: $T_1 = (T_\infty - T_0)\pi^{-1/2}$. Koeficijent proporcionalnosti između (12b) i samo rješenje spomenutog integrala do beskonačnosti, što je jednak $\pi^{1/2}$, daje cijelokupno rješenje elegantno prikazano pomoću tzv. funkcije pogreške, tj. 'error function' (vrsta specijalnih funkcija). Naime,

$$T_\infty = T_1 \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\eta^2}{4}\right) d\eta + T_0,$$

pa slijedi

$$T(z,t) = T_0 + (T_\infty - T_0) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{z/\sqrt{Kt}} \exp\left(-\frac{\eta^2}{4}\right) d\eta,$$

odnosno

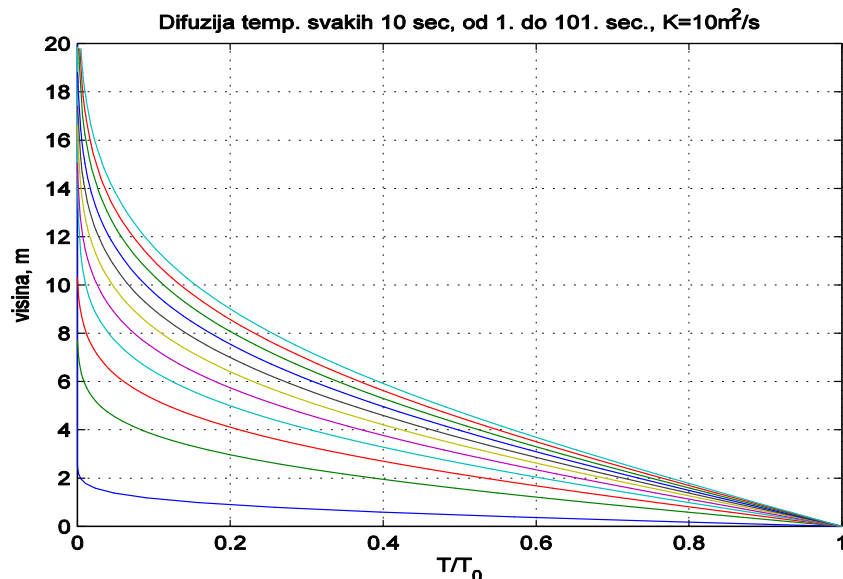
$$T(z,t) = T_0 \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{z}{\sqrt{Kt}}\right)\right] + \frac{T_\infty}{\sqrt{\pi}} \int_0^{z/\sqrt{Kt}} \exp\left(-\frac{\eta^2}{4}\right) d\eta, \quad (13a)$$

gdje je

$$\operatorname{erf}(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-y^2) dy, \quad (13b)$$

u granicama $0 \leq x < \infty$ (gdje je spomenuti koeficijent proporcionalnosti između (12b) i (13) već uključen u (13)). Rješenje (13) postupno propagira u visinu za pripadna vremena $t > 0$. Slika 15.1 prikazuje vertikalnu difuziju, tj. vremensko-prostorni razvoj od (13) za odabrane ulazne parametre. Da je bio dozvoljen i donji potprostor istih osobina za difuzivno širenje, rezultat bi

bila gaussovska raspodjela $T(z,t)$. Postojanje vjetera i stratifikacije bi znatno izobličilo ove krivulje.



Slika 15.1 Izraz (13) je normaliziran i prikazan u 10 konsektivnih vremena, svakih 10 sekundi, od 1. (najniža krivulja) do 101. sekunde; ulazna vrijednost za K je $10 \text{ m}^2/\text{s}$.

Rješenje očito sliči na Gaussovu raspodjelu. Alternativno, (13a) možemo zapisati kao

$$T(z,t) = T_0 + (T_\infty - T_0) \operatorname{erf}\left(\frac{z}{\sqrt{Kt}}\right). \quad (13c)$$

Sličan se slučaj može rješavati i u horizontalnoj ravnini. Na primjer, jednostavni modeli atmosferske difuzije i disperzije polutanata su pretpostavljali vrijednosti od K profila i proračunavali difuziju pojedinog polutanta $C(x,y)$ na određenoj kvazi-horizontalnoj plohi. Izvor širenja je bio zadan u ishodištu $(0,0)$ na visini h , tj. $Q(0,0;h)$, pretpostavio bi se konstantan vjetar U i računala bi se horizontalna raspodjela koncentracije za pojedina vremena t uz pretpostavku $x = tU$. Perjanica koncentracije $C(x,y)$ bi imala idealizirani gaussovski oblik. Za slučaj varijabilnog vjetera, potrebno je koristiti numeričke metode. Jedan prikaz numeričkog modeliranja transporta, disperzije i difuzije zračnog onečišćenja se nalazi u Jeričević i sur. (2010). Već i djelomice kompleksan teren bitno mijenja pripadnu raspodjelu $C(x,y;z)$. U slučaju stratificirane atmosfere, preporučaju se sheme višeg reda zatvaranja parametrizacije turbulencije i potpunije rješavanje izraza (6).

Asimptotički izračun integrala u (13) se provodi na dva načina, ovisno o veličini argumenta $x = z/(Kt)^{1/2}$: ako je x mali, npr. $0 < x \leq 1.2$, treba razviti u Taylorov red podintegralni izraz $\exp(-t^2)$ i koristiti barem 5 članova što vodi do alternirajuće sume članova tipa $x^{2n+1}/[n!(2n+1)]$. Za veći argument, npr. $x > 1.2$, koristimo parcijalnu integraciju u granicama $(0, x) = (0, \infty) - (x, \infty)$ koja daje

$$I(x > 1.2) = \frac{\pi^{1/2}}{2} - \int_x^\infty \exp(-y^2) dy = \frac{\pi^{1/2}}{2} - \frac{\exp(-x^2)}{2x} + \int_x^\infty \frac{\exp(-t^2)}{2t^2} dt .$$

Sumirajući prvih nekoliko članova beskonačnog ali konvergentnog reda dobija se:

$$I(x > 1.2) = \int_0^x \exp(-y^2) dy \approx \frac{\pi^{1/2}}{2} - \frac{\exp(-x^2)}{2x} \left[1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{12x^4} - \frac{1}{120x^6} + \frac{1}{840x^8} \dots \right]$$

što predstavlja solidnu asimptotičku aproksimaciju traženog integrala u (13) za veće argumente. U svakom slučaju, apsolutna vrijednost relativne pogreške je reda veličine manje od 4 %.

Slijedi nekoliko tema iz naprednih područja atmosferske turbulencije koje se uglavnom obrađuju u poslijediplomskim kursevima.

„Burgulencija“

Znajući da je nelinearna advekcija rješiva u slučaju kad se uključi i difuzija (Burgersova jedn.), znanstvenici i inženjeri su se bili ponadali u 40-tim godinama prošlog stoljeća da će riješiti problem turbulencije takvim pristupom (vidi npr. Acheson 1990, Logan 2008). Tipičan primjer nelinearne advekcije s difuzijom je tzv. problem pucanja brane koja na jednoj strani drži fluid (vodu) da se ne razlije na drugu stranu; to se rješava modelom

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (14)$$

uz rubne uvjete: $u(x \rightarrow -\infty, t) = u_1$, $u(x \rightarrow +\infty, t) = u_2$, gdje su $u_{1,2}$ brzine putujućih valova (u_2 može biti npr. nula). Traži se dvostruko kontinuirano diferencijabilno rješenje $u(x, t) = U(z)$, $z = x - ct$. Pretpostavljajući da je $u_1 > u_2$, i supstitucijom nove varijable z , dobija se obična diferencijalna jednačina za $u = U(z)$: $-cU' + UU' - \nu U'' = 0$. Ova se odmah integrira jednom pa se dobije da vrijedi: $-cU + U^2/2 - \nu U' = A$; odnosno, $U' = (U^2/2 - cU - A)/\nu$, gdje je A konstanta. Integracije koja se dobiva (zajedno i za c) evaluacijom zadnjeg izraza u limesu za $z \rightarrow \pm\infty$. Slijedi da je $A = u_1^2/2 - cu_1 = u_2^2/2 - cu_2$, stoga $c = (u_1 + u_2)/2$, što daje brzinu vala konačne amplitude kao srednjak od dvaju stanja u \pm beskonačnosti. Iz toga slijedi konstanta integracije $A = -u_1u_2/2$. Onda zadnja diferencijalna jednačina daje:

$$-2\nu U' = (U - u_1)(u_2 - U).$$

Separirajući varijable i integrirajući, dobije se

$$\frac{z}{\nu} = \frac{2}{u_2 - u_1} \ln \frac{u_2 - U}{U - u_1},$$

gdje je 2. konstanta integracije odmah izabrana tako da za $z = 0$ bude $U(0) = c$ zbog simetrije problema (rješenje u sredini, putujući s poremećajem, giba se srednjom brzinom c). Konačno, rješavajući za U , dobije se profil putujućeg vala kao rješenje:

$$U(z) = \frac{u_2 + u_1 e^{\zeta(z)}}{1 + e^{\zeta(z)}}$$

gdje je privremeno $\zeta = (u_2 - u_1)z/(2\nu)$. Nakon malog preuređenja zadnji izraz alternativno pišemo kao:

$$U(x - ct) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{1 + e^{(u_2 - u_1)(x - ct)/(2\nu)}}, \quad (15)$$

što predstavlja tzv. putujući valni šok. Imajući na umu da je $\Delta u = u_2 - u_1 < 0$, jednostavno se provjeri da su ispunjeni rubni uvjeti za $x \rightarrow \pm \infty$. Šok je to uža, D , te lokalno strmiji, što je manja viskoznost ν jer $D \approx \nu/|\Delta u|$.

Zbog jednostavnosti, pretpostavimo li sada da vrijedi $u_1 = 2V$ te $u_2 = 0$, onda (15) postaje

$$U(x,t) = \frac{2V}{1 + e^{V(x-Vt)/\nu}}, \quad (16)$$

što opet predstavlja putujući val brzine srednjom amplitudom V čija je karakteristična debljina jednaka ν/V .

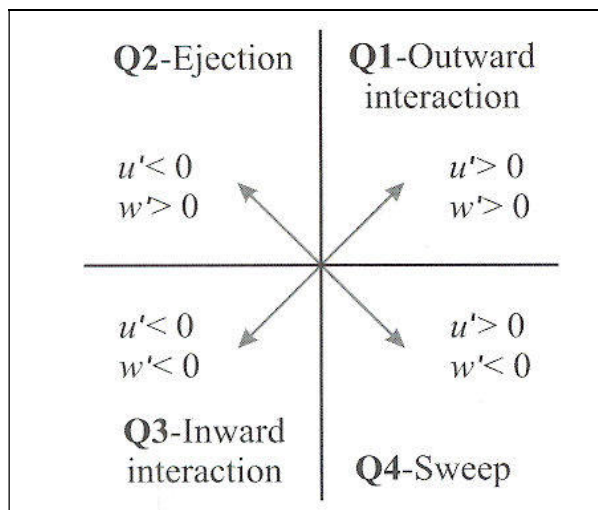
Ipak, „burgulencija“ kao surogat za turbulenciju, nije uspješna iz više razloga. Glavni je razlog nepostojanje više skala procesa i mogućnosti njihove interakcije. Drugi je komplikacija prikaza „burgulencije“ kao 3D procesa, nepraktično je uključiti i silu gradijenta tlaka. Nadalje, važna osobina NS jedn. pri velikom Re je osjetljivost na male promjene u početnim uvjetima pri rubovima domene ili forsiranju, a to nije slučaj s jedn. poput (14). Dakle, „burgulencija“ nije dobar model za važan aspekt turbulencije – spontanu pojavu slučajnog gibanja iz kaotične dinamike. Ima još nekoliko nelinearnih modela, relativno jednostavnih obzirom na turbulenciju kao takvu, kojima je bilo pokušano modelirati kaskadu strujanja iz laminarnog u turbulentan režim, no svi su prejednostavni i ne ispunjavaju sve osnovne uvjete tj. kriterije turbulentnog strujanja.

Drugi poznati primjer analitičkog modeliranja valova konačnih amplituda je tzv. Korteweg – de Vries – ova jednadžba. U njoj je nelinearna advekcija uravnotežena pojačanom disperzijom vala, za razliku od difuzije korištene u (14). Koristi se u blago nelinearnoj dinamici plitkog fluida, kvantnoj fizici (verzija nelinearne Schrödingrove jedn.), itd.

Statistika turbulentnih kovarijanci ($\overline{u'w'}$)

Uobičajeno je u atmosferskoj turbulenciji da uglavnom vrijedi $\overline{u'w'} < 0$. Turbulentni izbačaji, $u < 0$, (engl. *bursts, ejections*) su definirani s $u'w' < 0$ uz $w' > 0$, dok su tzv. zamasi ili brisaji, $u > 0$, definirani kao $u'w' < 0$ uz $w' < 0$. Slika 15.2 prikazuje kvadrantnu dekompoziciju mogućih kovarijanci i pripadnih aktivnosti povezanih s $u'w'$; nije se teško uvjeriti da dominiraju **Q2** i **Q4** aktivnosti, tj. da je u prosjeku najčšće $\overline{u'w'} < 0$. Ipak, može se dogoditi ponekad $u'w' > 0$, tj. da se pojave i preostale dvije moguće aktivnosti: **Q1** te **Q3**. Aktivnost **Q1** se pojavljuje i može dominirati iznad elemenata hrapavosti gdje se upravo dogodio prijelaz $u' < 0$ u $u' > 0$, uz nepromijenjeni $w' > 0$. Odmah nakon prijelaza preko tog elementa hrapavosti dominira **Q4** aktivnost, vidi Sl. 15.2. Kako se strujanje približava idućem elementu hrapavosti podloge, može se pojaviti aktivnost **Q3** zbog obostranog uspora $u' < 0$ te $w' < 0$.

Sekvence aktivnosti tipa: **Q2-Q1-Q4-Q3**, Sl. 15.2, u smjeru kazaljke na satu, su tipične za podloge gdje se elementi hrapavosti ponašaju individualno pa se javlja „do-povezivanje“, odnosno „dodatno priključivanje“ ili vezivanje strujanja (engl. '*reattachment*'). Ovakvo ponašanje turbulentnih tokova impulsa, povezano uz heterogenost podloge, ima i značajne posljedice na prijenos skalara i raspršenje čestica u prizemnom sloju.



Slika 15.2. Kvadrantna dekompozicija: ilustracija mogućih kovarijanci u' i w' u kombinaciji veličine $(\overline{u'w'})$. U većini slučajeva značajnih za turbulentni prijenos impulsa dominiraju tzv. izbačaji (engl. *bursts* ili *ejections*) i tzv. brisaji ili zamasi (engl. *sweeps*). To dovodi do najčešćeg $(\overline{u'w'}) < 0$ predznaka, odnosno dominacije Q2 ili Q4 aktivnosti. S druge strane, Q1 predstavlja zajedničko ubrzanje obje komponenti (međudjelovanje izvlačenja prema van) kovarijance pa je $(\overline{u'w'}) > 0$, a Q3 predstavlja uspor za obje komponente u' i w' (međudjelovanje uvlačenja prema unutra) te se opet postiže $(\overline{u'w'}) > 0$. Nailazeći na značajan objekt hrapavosti podloge turbulentna struja prolazi kroz ciklus: **Q2** → **Q1** → **Q4** → **Q3**. Strjelice iz centra slike ukazuju na relativnu promjenu komponenti (u, w) .

Napomenimo da 3D strukture elemenata hrapavosti mogu dodatno komplicirati odnose među kovarijancama $(\overline{u'_i u'_j})$. U (sub)urbanom prizemnom sloju može doći do značajnih odstupanja od spomenute dominacije Q2 i Q4 strukture; hrapavost je tada nerjetko i funkcija smjera vjetra. Nepotrebno je naglasiti da nestacionarnost i tranzijentnost strujanja, poput npr. meandriranja, dodatno modificiraju kompleksnost prizemnog turbulentnog gibanja zraka.

Niske mlazne struje

Postoji barem 4 do 5 vrsta niskih mlaznih struja (engl. '*low-level jet*', LLJ) i više pripadnih definicija. Najjednostavnija, najgrublja i vjerojatno najopćenitija definicija kaže da je to maksimum vjetra na određenoj visini u donjoj troposferi tako da je vjetar slabiji ispod i iznad te visine (za barem ~ 10%). Uzroci LLJ-a su različiti: od traženja kvazi-geostrofičke prilagodbe donje troposphere do Coriolisovog efekta na zmorac, od mezoskalnog termalnog vjetra pa do tipičnog katabatičkog vjetra (vidi dalje ispod). U LLJ-e pripadaju i pred- i postfrontalne zone pojačanog vjetra u ABL-u. Inercijska oscilacija je tipičan primjer LLJ strujanja. To je pojačanje strujanja oko vrha ABL-a nakon prestanka dnevnog grijanja, dok još uvijek postoji pojačani dotok impulsa iz atmosfere k podlozi (gdje se impuls troši na turbulentno i posebice prizemno trenje). Tada se zbog pojačane stratifikacije uz podlogu nerjetko stvori višak nepotrošenog a već doniranog impulsa iz srednje troposfere što dovodi do noćnog LLJ-a.

Važna vrsta LLJ-a su obalne niske mlazne struje. Jedna od najpoznatijih je ona uz zapadnu obalu SAD-a (npr. Rogers i sur. 1998) koja se javlja zbog specifičnog položaja anticiklone iznad sjeveroistočnog, hladnog Pacifika i tipično slabe ciklone, ili barem visinskog termalnog dola iznad jugozapadnog kopna SAD-a (CA, NV, AZ). Obalna relativno visoka orografija i

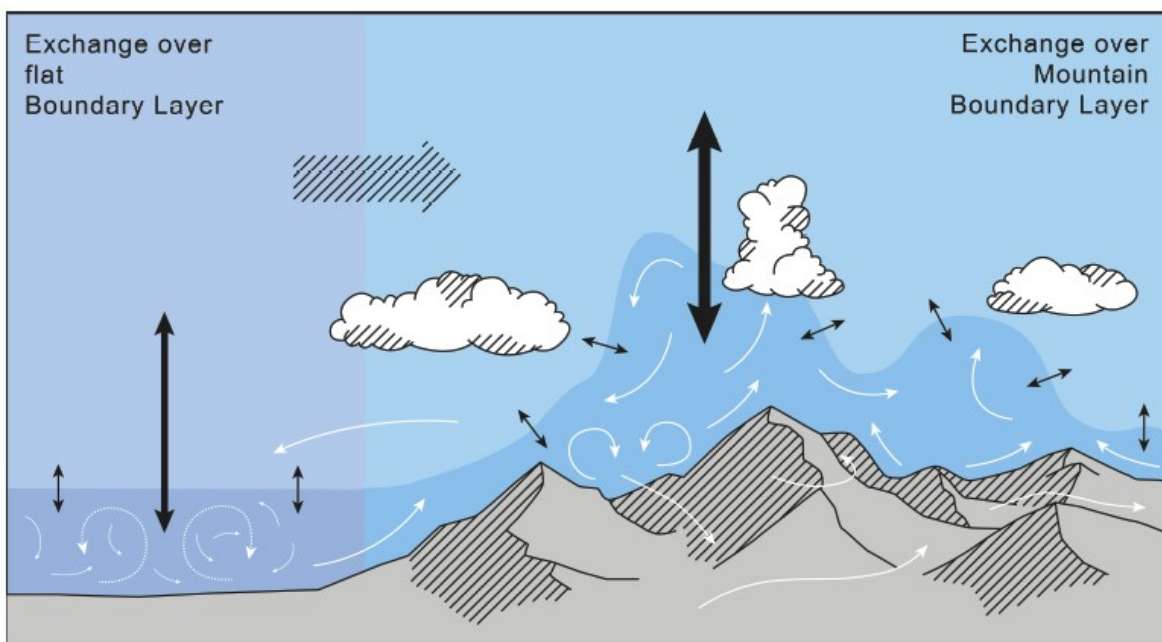
geometrija same krivulje obale značajno pojačavaju ovu nisku mlaznu struju koja se obično nalazi na 300 do 800 m visine s maksimumom vjetra i do iznad 22 m/s. Ova struja utječe na lokalno vrijeme, formiranje i nestanak magle i niske naoblake: St ili/i Sc. Postoji i važno međudjelovanje ove mlazne struje s pripadnom dinamikom obalnog oceana što dovodi do pojačanog izviranja obalnog mora (*upwelling*).

16. PRANDTLOV MODEL, nagnuti turbulentni sloj

Do sada su bili diskutirani horizontalni slojevi u kojima sila teža nema direktnog utjecaja na osnovno horizontalno strujanje. No, povećava li se modelska rezolucija podloge, sve je manja šansa da se na kopnu pronađe horizontalna ploha. Nagnute plohe su gotovo svuda oko nas u prirodi. One kad se hlade, dovode to katabatičkog strujanja, odnosno kad se griju, uzrokuju

anabatičko strujanje. Na ovakva gibanja Obukhovljeva duljina, $L = -\frac{\bar{\theta}}{gk} \cdot \frac{u_*^3}{w'\theta'_0}$, nije direktno

osjetljiva (npr. Grisogono i sur. 2007). Spomenuto strujanje nad grijanom i hlađenom kosinom, i još kompliciranije, u 3D dolini, može generirati niske mlazne struje uronjene u pripadni ABL, itd. U donjoj atmosferi i pri dnu mora se javljaju različite vrste gibanja usljed neravnomjerne (diferencijalne) težine u fluidu (npr. Mahrt 1982). Da bi se adekvatno opisao razvoj vjetra, temperature, oborine, onečišćenja, stanja tla nad kosinom, potrebno je uzeti u obzir niz ne sasvim razjašnjenih parametara. Slika 16.1 skicira raznolikost graničnih slojeva nad ravnicom i u planinama.



Slika 16.1 Turbulentna razmjena iznad planine, skica. Ovi procesi određuju razmjenu topline, impulsa i mase između podloge, atmosferskog graničnog sloja i „slobodne atmosfere“. Iznad kompleksnog terena to uključuje turbulentno miješanje, vjetar obronka i dolinski vjetar, stvaranje i širenje uzgonskih valova te mokru konvekciju. Vertikalni prijenos u „slobodnu atmosferu“ je u prosjeku jači iznad planine (debele crne strelice).

Iz Sl. 16.1 uviđamo važnost planinske meteorologije i klimatologije. Pripadnih mjerenja nema još dovoljno, a numeričke simulacije su ili idealizirane, ili s nedovoljno detalja što bi uvažavali kompleksnost terena i važnih međudjelovanja. Ovo se posebice odnosi na klimatske simulacije (preopćenite parametrizacije i gruba prostorno-vremenska rezolucija). Istovremeno, klimatske promjene se pojavljuju slojevito po visini, imajući i poneke arktičke osobine uključujući topljenje ledenjaka, promjene vodne bilance, albeda, flore i faune.

Uzimajući u obzir samo nagib terena i grijanje ili hlađenje podloge, treba prepoznati u osnovnim jednadžbama da sila uzgona ima i komponentu niz struju fluida. Prvi takav uspješan i jednostavan model strujanja nad kosinom je (1D) Prandtlov model.

Klasični Prandtlov model

Radi se o vrlo pojednostavljenom 1D modelu. Originalni model je iz 40-tih godina XX stoljeća; na njemu su kasnije radili Defant i drugi znanstvenici i inženjeri (originalni model je koristio Defant za $(\alpha, C) > 0$, tj. anabatičko strujanje). Kad se provede zakretanje horizontalnog koordinatnog sustava (x, z) niz padinu za kut α , dobije se novi sustav (x', z') u kojem se modificira jedn. gibanja i donekle termodinamička jedn. Pretpostavljeni kut α je mali pa vrijedi tzv. kvazihidrostatska aproksimacija (Mahrt 1982) u dovoljno stabilnoj i mirnoj atmosferi (bez osnovnog vjetra), koristimo i Boussinesqovu aproksimaciju te zanemarujemo ovisnost gibanja, mase i topline o udaljenosti niz ili paralelno kosini. Kvazihidrostatski je potrebna jer će koordinatni sustav biti nagnut u odnosu na horizontalan početni sustav u kojemu pretpostavljamo da vrijedi hidrostatska aproksimacija, a taj zahtjev ne može i u jednom i u drugom koordinatnom sustavu simultano biti striktno ispunjen. Znači, opuštenije rečeno, kvazihidrostatski je poput projekcije hidrostatski na novi nagnuti koordinatni sustav.

Spomenuta transformacija je dana u npr. Denby (1999) i u Stiperski i sur. (2007) pa je nećemo izvoditi (studenti u principu trebaju znati kako se provode ovakve transformacije). Preostaje vrlo pojednostavljeno 1D strujanje (bez apostrofa transformiranih koordinata) u kojem je uzgonski član (1. na desnoj strani (1a)) uravnotežen turbulentnim trenjem (2. član na desnoj strani (1)), dok 1. član na desnoj strani (1b) predstavlja adijabatičko zagrijavanje (za silazno strujanje, a hlađenje za anabatičko strujanje):

$$\frac{\partial U}{\partial t} = g \frac{\theta}{\theta_0} \sin(\alpha) + \frac{\partial}{\partial z} \left(KPr \frac{\partial U}{\partial z} \right), \quad (1a)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\gamma \sin(\alpha) U + \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial \theta}{\partial z} \right), \quad (1b)$$

što u slučaju stacionarnog stanja vodi do

$$F'' + \sigma^4 F = 0, \quad (2)$$

gdje je $\sigma^4 = N^2 \sin^2(\alpha) / [K^2 Pr]$, $F = (u, \theta)$ uz postojeću 4. derivaciju po z -varijabli.

Rubni uvjeti su

$$\theta(z=0) = C, \quad U(z=0) = 0, \quad (3)$$

$$\theta(z \rightarrow \infty) = U(z \rightarrow \infty) = 0. \quad (4)$$

U ovom modelu (1) ili (2) s rubnim uvjetima (3) i (4) vrijede standardne oznake gdje je U -komp. vjetra niz padinu (kosinu), θ je perturbacija pot. temp., $K = K_h$ je vrtložna konduktivnost topline (toplina po jedinici mase, tj. pot. temperature pomnožene gustoćom i C_p), Pr je Prandtlov broj (u stvarnosti funkcija strujanja) pa je vrtložna (turbulentna) difuzivnost jednaka produktu KPr , γ je vertikalni gradijent srednje, tj. osnovne temperature $\langle \theta(z) \rangle$ koji je zadržan iz nerotiranog (nezakrenutog) sustava. Rubni uvjeti su da nema vjetra na tlu ('no slip'), temperaturna perturbacija na tlu (npr. led koji se topi) je konstantna ($C < 0$ za katabatički vjetar), dok svi poremećaji trnu za proizvoljno veliku visinu. Primjetimo da model ne smije imati vrlo duboko strujanje jer tad preuzeti γ iz horizontalnog nerotiranog sustava nije ni približno dobro predstavljen u ovom novom sustavu. Stacionarnost se postiže nakon nekoliko karakterističnih perioda sustava (1) do (4), tj. nakon $\tau \sim 2\pi / (N \sin(\alpha))$.

Napomenimo da ovaj klasični Prandtlov model sadrži samo dinamiku impulsa (niz padinu) i topline na osnovi obične K-teorije (tj. K-teorije 1. reda) $K = K_c = const$. Model je opisan u dvije jedn. s dvije nepoznanice, kao i za Ekmanov sloj; stoga su i rješenja matematički slična – eksponencijalno trnuće sinusoidalne funkcije. U stacionarnom klasičnom modelu su lijeve strane pripadnog sustava nula i ravnoteža je određena balansom između negativnog uzgona i trenja (za impuls), te vertikalnog temperaturnog gradijenta, tj. adijabatičkog hlađenja ili grijanja i turbulentne razmjene temperature na desnoj strani od (2). Preporučamo za vježbu riješiti stacionarni Prandtlov model, (1) i (2) uz pripadne rubne uvjete te konstantni Pr . Dakle, valja pokazati da je

$$\theta_s(z) = C \exp\left(-\frac{z}{h_p}\right) \cos\left(\frac{z}{h_p}\right), \quad U_s(z) = -C\mu \exp\left(-\frac{z}{h_p}\right) \sin\left(\frac{z}{h_p}\right), \quad (5)$$

gdje je $h_p = \sqrt{2}/\sigma$ karakteristična visina Prandtlovog sloja; nadalje,

$$\sigma = \left(\frac{N \sin(\alpha)}{Pr^{1/2} K_c}\right)^{1/2}, \quad h_p = \left[\frac{4K_c^2 Pr}{N^2 \sin^2(\alpha)}\right]^{1/4}, \quad \mu = \left(\frac{g}{\theta_0 \gamma Pr}\right)^{1/2} \quad (6)$$

uz uobičajeni kvadrat uzgonske frekvencije $N^2 = \gamma g / \theta_0$. Indeks ‘s’ označava stacionarno rješenje za temperaturu i vjetar. Odavde se može odmah izračunati visina ($z_j = h_p \pi/4$) i maksimalna brzina niske mlazne struje i procijeniti u^* , θ^* koji su potrebni za proračun prizemnih turbulentnih tokova. Primjetimo da u samom ‘nosu’ niske mlazne struje, gdje je maksimalna brzina strujanja, Ri postaje beskonačan jer tamo nema smicanja. Iz (5) se odmah vidi da su rješenja matematički ekvivalentna onima za Ekmanov sloj. Iz (6) zaključujemo da je dubina Prandtlovog sloja to veća što je jača turbulentna difuzija i slabija stratifikacija atmosfere (protiv koje se „bori“, probija katabatički vjetar) – što je i u skladu s intuitivnim očekivanjem. Nadalje zaključujemo da su nagnutiji granični slojevi relativno plići. Konačne perturbacije potencijalne temperature i vjetra, prema (5), su izravno proporcionalne površinskom deficitu potencijalne temperature C , tj. što je jače ohlađivanje tla, to će biti jača prizemna plitka inverzija i u nju uronjeno silazno strujanje. Maximum tog vjetra je to jači što je slabija stratifikacija atmosfere. Prema ovom modelu, maximum katabatičkog vjetra ne ovisi o nagibu terena, ali visina tog maksimuma ovisi kao $z_j \sim \sin^{-1/2}(\alpha)$. Za anabatički vjetar, tj. $C > 0$ i $\alpha > 0$, postupak i rješenja su analogna prikazanim za katabatički vjetar, no profili $\theta_s(z)$ i $U_s(z)$ nisu simetrični: u anabatičkom strujanju sila teža koči uzlazno strujanje obronka mada je uzgon pozitivan (općenito i kvalitativno: termodinamika nije simetrična, odnosno reverzibilna); profili su dublji i izgladeniji no u katabatičkom strujanju. Pri tome treba i znatno povećati K_c .

Prandtlov model (1) se jednostavno rješava i WKB(J) metodom nultog reda na matematički ekvivalentan način kao i Ekmanov model. Više o tome se može naći u Grisogono i Oerlemans (2001a, b) te Kavčič i Grisogono (2007). Model je proširen kasnije i na blago-nelinearno strujanje obronka, tako da veliki prizemni poremećaj temperature (zbog termalnog forsiranja podloge) djeluje na lokalnu stratifikaciju.

Mnogi numerički modeli imaju poteškoće u simuliranju nagnutih graničnih slojeva, jer takvo strujanje može značiti da je Obukhovljeva duljina premala (prejaka stratifikacija) pa ne vrijedi skaliranje sa z/L . Da bi se to pak izbjeglo, ponekad se umjetno pojačava vertikalna difuzija u modelima, što je umjetan i površan način rješavanja tog problema. Postoje i druge poteškoće s Obukhovljevom duljinom (vidi npr. Grisogono i sur. 2007). U realističnijem pripadnom strujanju prizemna stratifikacija mora biti pod utjecajem strujanja jer je prizemni, strujanjem induciran $d\theta/dz \gg \gamma$.

Treba biti pažljiv u interpretaciji sustava (1) do (4). Budući da je transformacija napravljena s osnovnim jedn. već djelomice pojednostavljenim (hidrostatika, itd.) i u skalarnom obliku (umjesto tenzorski s kompletnijim jednadžbama), nije moguć jednostavan prijelaz natrag u horizontalni sustav i interpretirati rezultate za horizontalno strujanje. Na primjer, vjetar postaje proizvoljno jak za izuzetno mali kut nagiba kosine, što je besmislen rezultat i posljedica nekonzistentne transformacije jedn. Ipak, model se koristi jer je vrlo jednostavan, fizikalno sadržajan i poučan. Prandtlov model mora ispunjavati uvjete tzv. „kvazihidrostatičnosti“ (Mahrt 1982, Haiden 2003); ovaj proizilazi iz nagnjanja (za promatrani kut α) prethodno horizontalne i hidrostatične atmosfere.

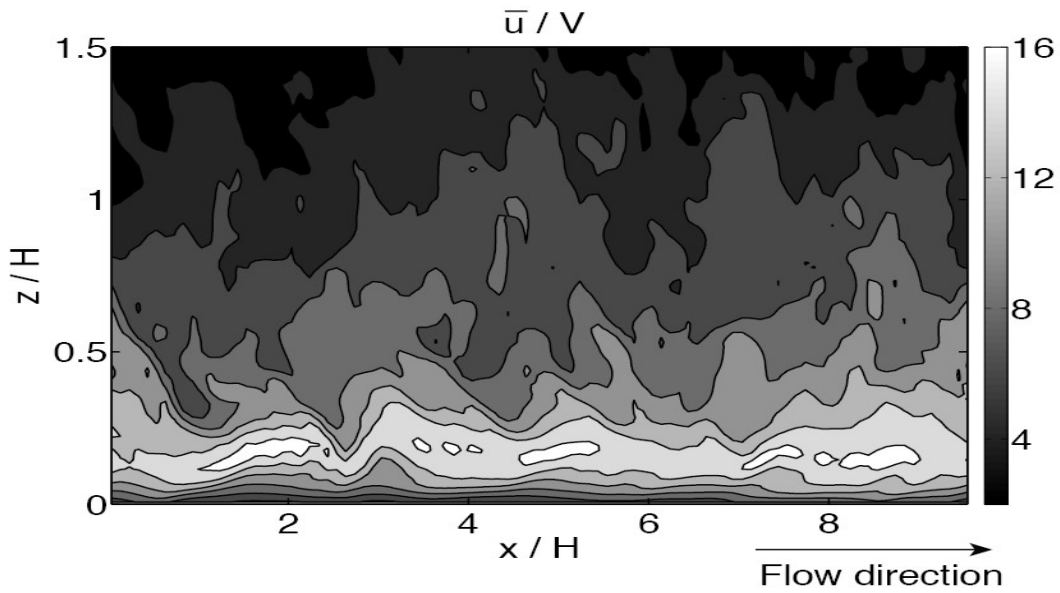
Kompletno analitičko rješavanje sustava (1) uz $K(z)$ je komplicirano (npr. Zardi i Serafin 2014, Grisogono 2003). Djelomičan uvid u vremensku ovisnost katabatičkog i anabatičkog jednostavnog strujanja može se dobiti promatranjem (kvazi)vertikalno usrednjene jedn. gibanja niz ili uz dugi obronak konstantnog nagiba i pripadne termodinamičke jedn. uz dodatno pojednostavljenje da je turbulentno trenje opisano najjednostavnijim mogućim trenjem, tj. rayleighjevskim gušenjem (proporcionalno brzini strujanja), odnosno newtonijanskim grijanjem ili hlađenjem (proporcionalno odstupanju potencijalne temperature). Tada sustav (1) zamijenimo s

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= g \frac{\theta}{\theta_0} \sin(\alpha) - k_u U, \\ \frac{d\theta}{dt} &= -\gamma \sin(\alpha) U - k_\theta \theta. \end{aligned} \tag{7}$$

Pretpostavljajući da su rješenja $\sim \exp(\lambda t)$, dobije se homogeni sustav dviju jedn. s dvije nepoznate funkcije čija determinanta mora biti jednaka nuli. To dovodi do karakteristične jedn. za λ : $(\lambda + k)^2 + (N \sin(\alpha))^2 = 0$, gdje je pretpostavljena jednakost $k_u = k_\theta = k$ zbog jednostavnosti pa se dolazi do konačnog rješenja za vjetar i temperaturu uz ili niz obronak u ovisnosti o vremenu. Pri tome je za karakter rješenja bitan odnos između k i N . Zanimljivo je da se pri tome mogu javiti trnuće (prigušene) oscilacije u vremenu imajući argument $N \sin(\alpha) t$.

Numeričke simulacije čistog katabatičkog strujanja

Ovdje samo napominjemo da su istraživanja katabatičkih tipova strujanja podaleko odmakla. Nedavni pregled ovakvih studija može se pronaći kod npr. Zardija i Whitemana (2013). U doktorskoj disertaciji Simona Axelsena (Utrecht, IMAU, Nizozemska, 2010, Axelsen i van Dop, 2009), kratko spomenutoj u Grisogono i Axelsen (2012), velika pažnja posvećena je modeliranju katabatičkog vjetra LES (*Large-Eddy Simulation*) tehnikom (npr. Cuxart, 2015). Jedan takav rezultat normalizirane komponente vjetra niz padinu skoro konstantnog nagiba je prikazan na Slici 16.2. Na slici su normalizirane osi karakterističnom dubinom strujanja koja iznosi ≈ 30 m, dok je karakteristična brzina vjetra V odabrana tako da je maksimalni vjetar, od oko 6 m/s, do 16 puta veći od brzine V . Simulacija odgovara katabatičkom vjetru na jednom austrijskom ledenjaku. Slično kao Sl. 16.2, a vremenski i niz x -os usrednjeni vertikalni profili vjetra i temperature se nalaze u Grisogono i Oerlemans (2001a,b) i u Grisogono i Axelsen (2012).



Slika 16.2 LES modelirani katabatički (ledenjački) vjetar niz Pasterze ledenjak, Austrija (prema Axelsen, 2010). Prikazana je normalizirana brzina vjetra ($V = 0.33 \text{ m/s}$, određen kao $\sim (sfc \text{ temp. flux}/N)^{1/2}$) presjek niz i okomito na padinu ($H = 27 \text{ m}$).

Slika 16.2, između ostalog, pokazuje nestacionarnost katabatičkog vjetra. Većina poremećaja ima nagnutu fazu ka gore i u lijevo; poremećaji se lome ili nestaju kako se udaljavaju od niske mlazne struje (maksimum katabatičkog vjetra) gdje su uronjeni relativno najveći vrtlozi, te se miješaju s okolnim zrakom. To ujedno znači da niska mlazna struja proizvodi tranzijentne ultra kratke težinske valove. Manji dio valova ima gotovo vertikalno položenu fazu i oni predstavljaju evanescentni dio spektra tih kratkih valova.

17. NUMERIČKO MODELIRANJE GRANIČNIH SLOJEVA

Ovdje dajemo tek 2 primjera modeliranja ABL-a. Ne treba spominjati da postoje brojni drugi primjeri numeričkog modeliranja ABL-a a pogotovo drugih mezoskalnih strujanja. Općenito, nema savršenog numeričkog geofizičkog modela; svi naši modeli su tek veće ili nešto manje pojednostavljenje prirode. Zato se u uostalom i zovu 'modeli'. Baklanov i Grisogono (2007) su naveli neke od nedavnih napredaka u mjerenjima, teoriji i modeliranju (posebice stabilnog) ABL-a, ali također ističu i neke od bitnih nedostataka u poznavanju turbulencije.

Najčešće se rutine NWP ('*numerical weather prediction*') modela koje se odnose na parametrizacije nalaze u odvojenim datotekama od čisto dinamičkih kodova; ovi drugi eksplicitno rješavaju parcijalne diferencijalne jedn. gibanja fluida (poput npr. modela plitkog fluida) odabranim numeričkim metodama. U parametrizirane procese spadaju oni procesi što kompletno ili djelomice nisu eksplicitno razlučeni, a dovoljno utječu na proračun vremena da ih je potrebno barem indirektno, najčešće statistički, uključiti modele. Tradicionalno se datoteke tih parametriziranih procesa u NWP modelima nazivaju paketima fizike, mada je to u biti neispravno, ali je to uvriježena terminologija u modelarskoj praksi. Tu spadaju dugovalno i kratkovalno zračenje, bilanca energije tla, mokri procesi (isparavanje, ukapljivanje, zaleđivanje i odleđivanje, stvaranje i nestajanje oblaka, magle, mraza, vrsta i intenzitet oborine) i turbulencija. I dok su ostali procesi barem u principu dobro shvaćeni, najčešće su „samo“ u pitanju računalni resursi i trajanje proračuna, turbulencija nije još uvijek dovoljno dobro shvaćena. Kroz ovu smo skriptu do sad naučili da se obično radi o fragmentarnim i fenomenološkim „teorijama“ turbulencije koje s manje ili više uspjeha osvjetljavaju samo tek pojedine aspekte turbulencije. Ne postoji u teoriji turbulencije određen ekvivalent npr. teoriji barokline nestabilnosti koja u potpunosti određuje najbitnije razvojne faze sinoptičkih poremećaja izvantropskih zemljopisnih širina.

Ponekad se događa da su pogreške modela u prizemnoj temperaturi (najčešće temp. na 2 m visine, tj. T2m) i vjetru (tipično na 10 m, tj. U10) više određene povezivanjem s parametrizacijom podloge (vlažnost, termalna vodljivost, itd.), nego samim tretmanom turbulencije; to se posebice javlja u uvjetima jako stabilnog ABL-a (npr. Holtslag i sur. 2013).

Dakle u ovom poglavlju govorimo o tek par zanimljivih aspekata numeričkog modeliranja u kojima dominiraju turbulentni procesi. To je daleko od adekvatnog prikaza ovog dijela teorijske meteorologije, ali namjera je ovdje da samo najavimo pripadni aspekt. Prikladne numeričke sheme za vremenske i prostorne promjene turbulentnih tokova se dotiču u drugim kursevima. Inače, turbulentni doprinosi vremenskim promjenama polju brzine, temperature, npr. specifične vlažnosti, itd. se obično dodaju dinamičkom dijelu NWP modela svaki vremenski korak jer je karakteristična vremenska skala turbulencije relativno kratka obzirom na druge vremenske skale zastupljene u modelu. Isti princip vrijedi i za klimatske modele.

Modeliranje zmorca

Vjerojatno je zmorac najviše proučavni mezoskalni fenomen. U svjetskom priobalju (npr. unutar obalnog Rossbyjevog radijusa deformacije što je ~ 70 – 100 km) živi oko 40% čovječanstva i to uvelike opravdava ovakvu zainteresiranost za zmorac. Na Hrvatskom sjevernom primorju zmorac se javlja u barem oko 50% dana ljetne sezone (Telišman P. i suradnici, 2006), a na Južnom primorju vjerojatno i češće. U ovoj skripti namjerno malo spominjemo zmorac da bi ostavili više prostora za neovisna studentska istraživanja i seminare.

Laboratorijsko i numeričko modeliranje obalne termalne cirkulacije (zmorac, itd.) je otpočelo prije gotovo pola stoljeća. Slika 17.1 ilustrira 2D idealizirani razvoj TKE i površinskog senzibilnog toka topline na presjeku more-kopno (lijevo-desno) prema T.Prtenjak i Grisogono

(2002). Prikazana su 2 poslijepodnevna termina. Vidi se vertikalni razvoj TKE zmorca kao i neporemećeni konvektivni ABL nad kopnom s maksimumom TKE na $\sim 1/3$ visine sloja. Fronta zmorca, koja potiskuje konvektivni ABL nad kopnom, je ~ 30 km od obalne granice u 14 h, dok je do 17 h propagirala dodatnih 20-tak km ostavljajući iza sebe plići i svježiji ABL. Ovo je također primjer IBL-a.

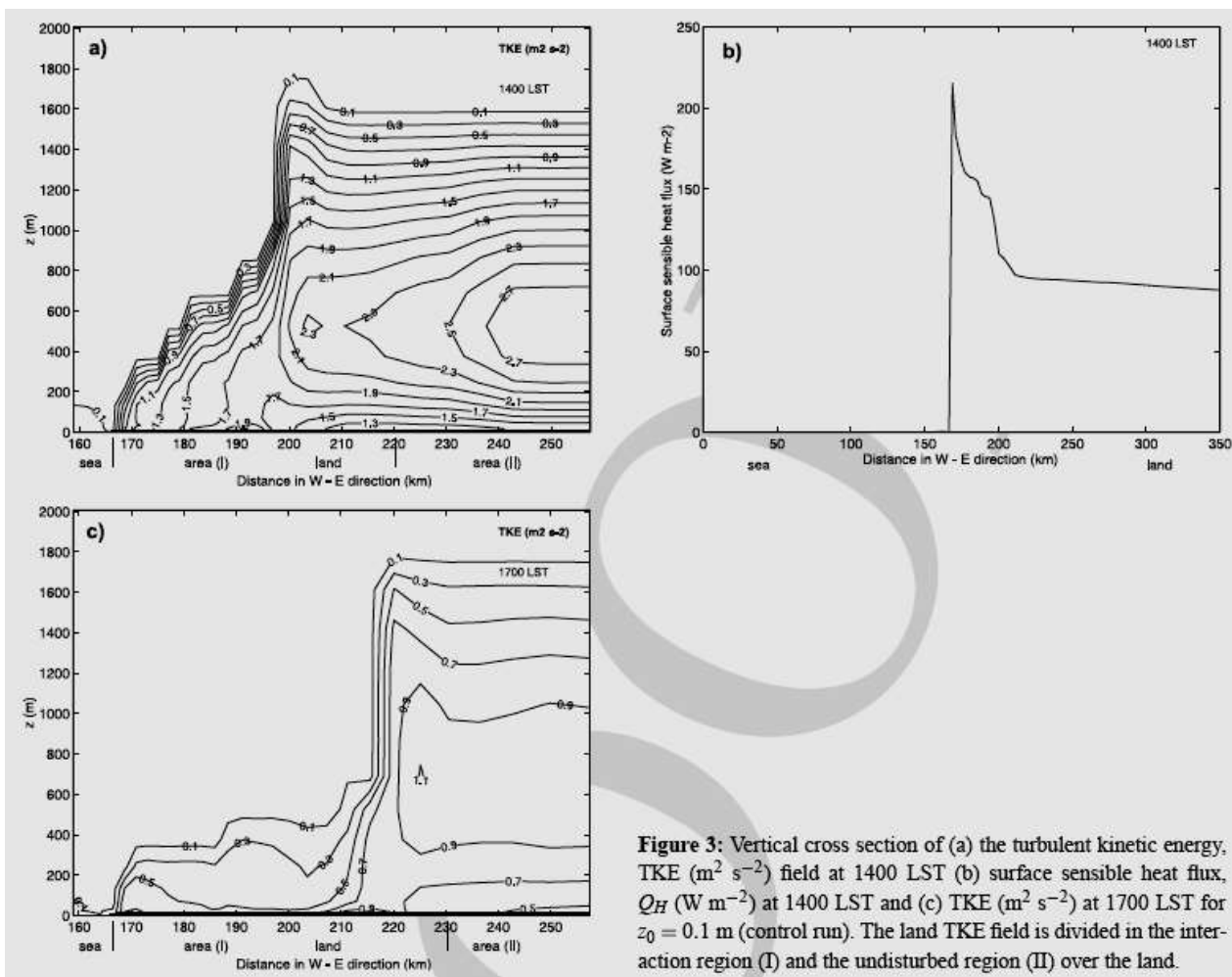


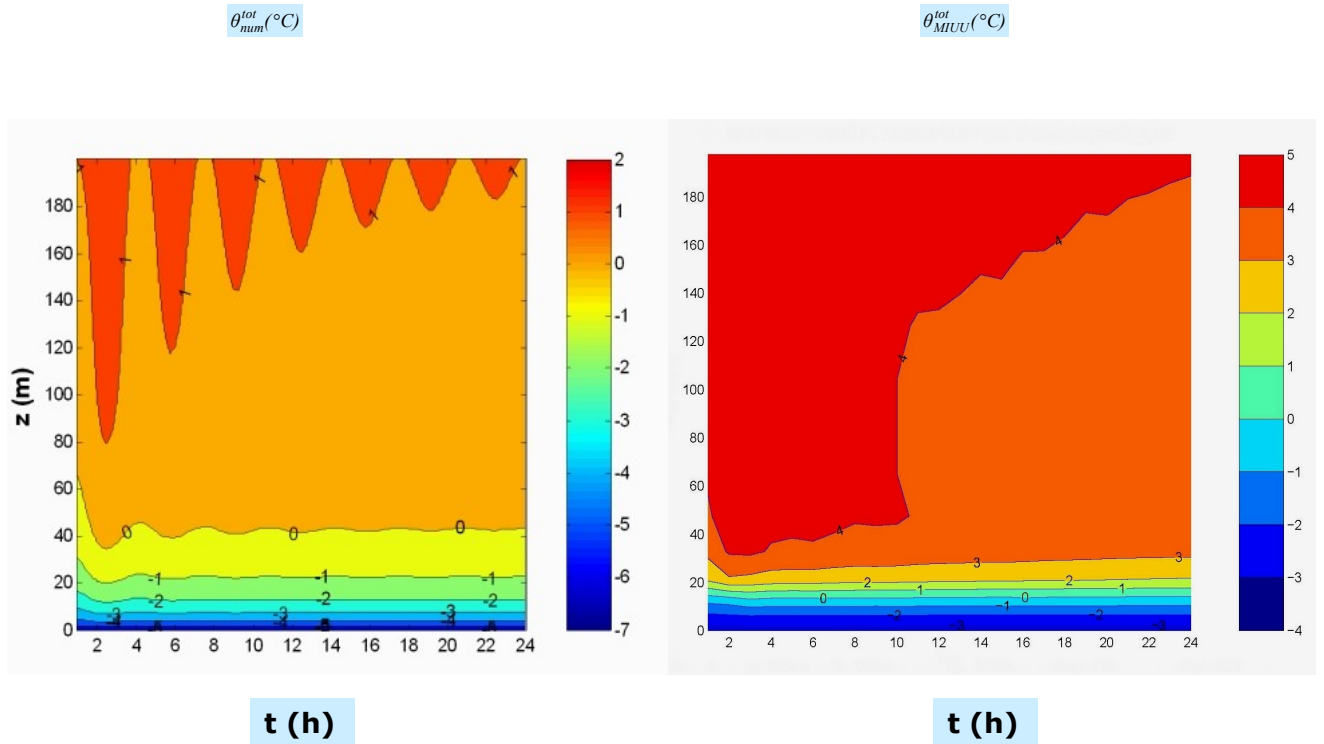
Figure 3: Vertical cross section of (a) the turbulent kinetic energy, TKE ($\text{m}^2 \text{s}^{-2}$) field at 1400 LST (b) surface sensible heat flux, Q_H (W m^{-2}) at 1400 LST and (c) TKE ($\text{m}^2 \text{s}^{-2}$) at 1700 LST for $z_0 = 0.1$ m (control run). The land TKE field is divided in the interaction region (I) and the undisturbed region (II) over the land.

Slika 17.1. TKE (lijevo) i površinski tok senzibilne topline (desno) u idealiziranom zmorcu u 14 h (gore) i 17 h (dolje) lokalnog standardnog vremena (LST). Simulacija je izvedena MIUU numeričkim modelom (Telišman i Grisogono 2002). Apscisa je horizontalna udaljenost, ordinata u a) i b) je visina. Vertikalna crta oko 168 km (a i c) označava granicu kopno-more i početak internog graničnog sloja (IBL).

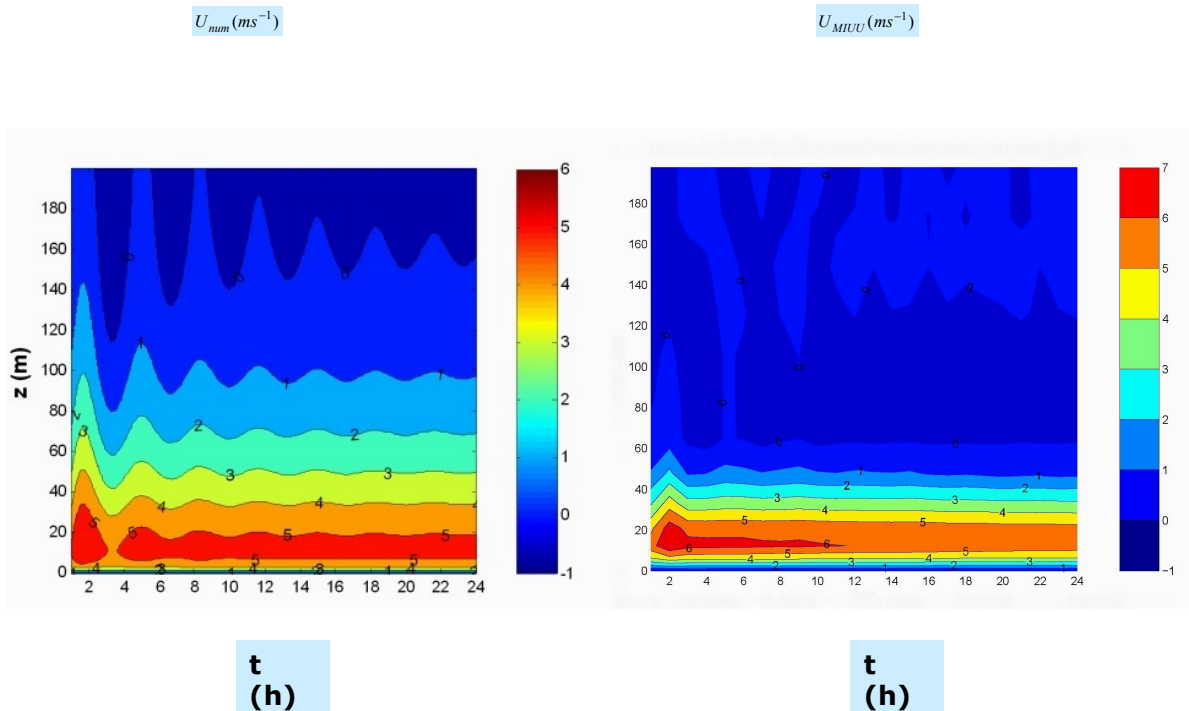
Modeliranje jednostavnog katabatičkog strujanja

Slike 17.2, 17.3 i 17.4 prikazuju usporedbu jednostavnog numeričkog rješenja za modificirani Prandtl model iz prošlog poglavlja (vremenski ovisan i s varijabilnom vertikalnom turbulentnom difuzijom, $K(z)$) i MIUU mezoskalnog modela s parametrizacijom turbulencije preko TKE (tzv. nivo 2.5). Svi ulazni parametri su kao u primjeru prošlog poglavlja. Mezoskalni MIUU model je mogao ostvariti istu formu strujanja kao i Prandtl model samo uz modifikaciju (poopćenje) lokalne karakteristične turbulentne duljine miješanja (Grisogono i Belušić 2008). Bez ovakve modifikacije, koja eksplicitno uključuje efekt vertikalnog smicanja srednjeg vjetra, MIUU model bi davao predifuzivan i predubok pripadni stabilni ABL (prevodeći ga iz jako- u slabo-do-umjereno stratificiranog ABL-a). Općenito NWP najčešće neadekvatno modeliranju

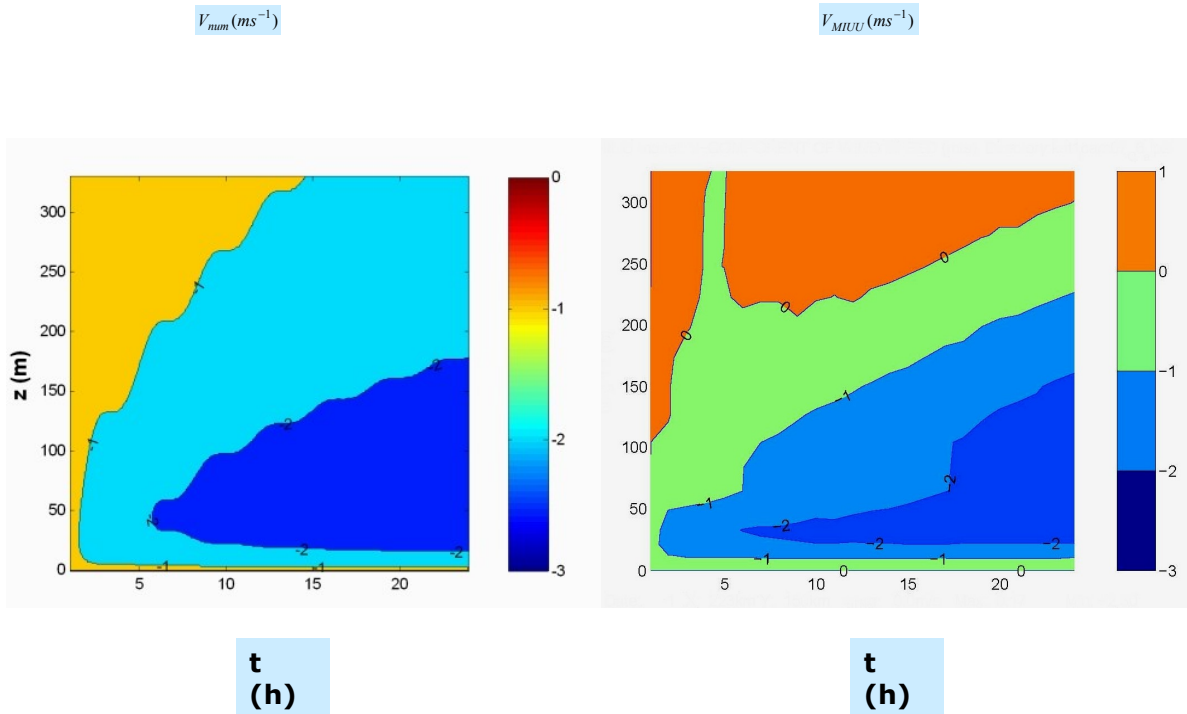
jako stabilni ABL; ili ga prikazuju predubokog, ili dolazi do druge krajnosti – kolapsa modeliranog sloja zbog nekomunikacije između podloge i modeliranih donjih slojeva atmosfere (eng. 'frictional decoupling').



Slika 17.2. Presjeci (t, z) za $\theta_{tot} = \theta + \gamma z$ jednostavnim numeričkim (a) i MIUU modelom (b). Parametri modela su: $(f, a, g, Pr, C) = (1.03 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}, -2.2^{\circ}, 5 \times 10^{-3} \text{ Km}^{-1}, 1.1, -6.5^{\circ}C)$. Ovdje je $t \approx T = 3.39 \text{ h}$; $h_{max} = 200 \text{ m}$, $K_{max} = 2 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$.



Slika 17.3. Presjeci $U(t, z)$ jednostavnim numeričkim (a) i MIUU modelom (b). Ostalo kao na Slici 17.2. $\text{Max}(U_{num}) \approx 5.4 \text{ ms}^{-1}$ na $z \approx 16 \text{ m}$.



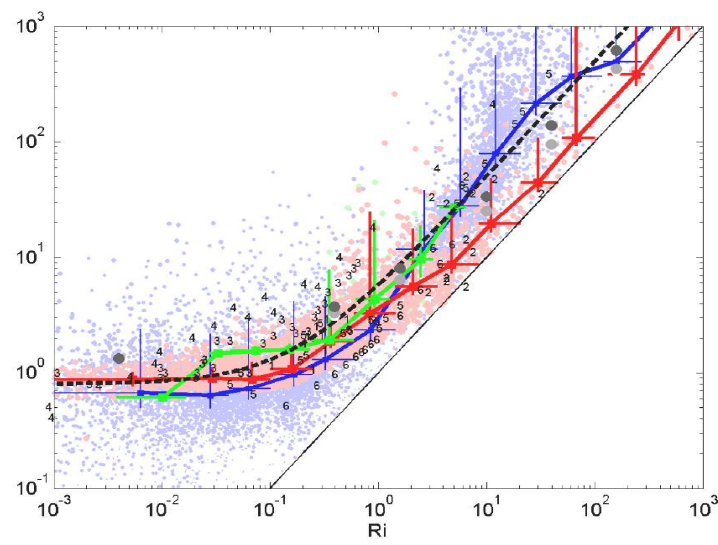
Slika 17.4. $V(t, z)$ jednostavnim numeričkim (a) i MIUU modelom (b). Ostalo kao na prošloj slici. $\text{Min}(V_{num}) \geq -2.6 \text{ ms}^{-1}$ na $z \approx 40 \text{ do } 80 \text{ m}$.

Na ove 3 slike se vidi jaka prizemna inverzija od $\sim 6\text{K}/(40\text{m})$ i niska mlazna struja od $\sim 6\text{m/s}$ na visini od $\sim 16\text{m}$. Obično numeričko rješenje (lijevo) ima značajne lažne numeričke oscilacije u gornjim dijelovima Slika 17.2 i 17.3 jer nije korišten nikakav filter (oscilacije su ugl. oko nule, tamo nema katabatičkog strujanja, osim što V -komp. polako difuzira prema tamo odozdo). Same oscilacije imaju prirodnu pobudu katabatičkim vjetrom, frekvencija im je $N\sin(\alpha)$, no u nekim od prikazanih numeričkih rezultata ove oscilacije su prenaplašene. Ovom smo usporedbom potvrdili slaganje MIUU i običnog, jednostavnog numeričkog modela sa zadanim profilom turbulentne difuzivnosti a u prethodnom smo poglavlju bili pokazali slaganje analitičkog (asimptotskog) i jednostavnog numeričkog rješenja.

Ovakvi modeli mogu biti od koristi pri analizi kompleksnih mjerenja te u parametrizaciji sličnih plitkih i perzistentnih strujanja koja su neadekvatno opisana u većini današnjih numeričkih modela, posebice klimatskih. Očito da pri dovoljno velikom nagibu terena i značajnoj stratifikaciji prije uvedena Obukhovljeva visina (ili duljina) prestaje biti relevantna mjera za opis prizemnih turbulentnih flukseva (za detalje vidi npr. Grisogono i sur. 2007). Ipak, ona se i danas gotovo isključivo koristi za parametrizacije prizemnog sloja u NWP modelima da se na neki način opiše donji rubni uvjet u pripadnoj numeričkoj prognozi vremena.

Spomenimo pri kraju ovog poglavlja o modeliranju ABL-a da Pr_{TURB} nije konstantan, već varira ovisno o stabilnosti strujanja (za razliku od konstantnosti u jednostavnom Prandtllovom modelu). To je očita posljedica već same definicije tog broja kao omjera turbulentne difuzivnosti i pripadne termalne konduktivnosti. Taj broj manje varira u konvektivnom ABL-u, tj. CABL-u, nego u SABL-u, jer u CABL-u je pojačana izmiješanost i općenito su slabiji gradijenti, nego u SABL-u.

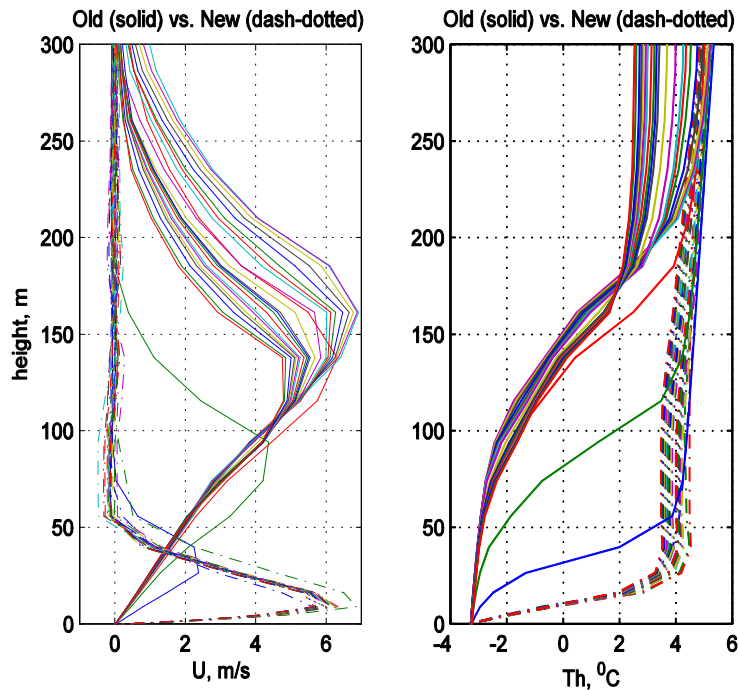
Stoga je u CABL-u općenito prihvaćena vrijednost Pr_{TURB} oko 0.8 i ona izgleda da postupno raste sa stabilnošću strujanja (Slika 17.5).



Slika 17.5. Ovisnost turbulentnog Prandtlovog broja (y -os) o gradijentnom Ri broju. Prikazani podaci pripadaju atmosferskim mjerenjima (plavo) u eksperimentima SHEBA i CASES99, laboratorijskim podacima (zeleno), LES (crveno, NERC, zahvaljujući Igoru Ezau), DNS (sive okrugle oznake), crna crtkana krivulja: $Pr_{TURB} \approx 0.8 + 5Ri$. Ova ovisnost za mali Ri ima puno manji nagib (umjesto 5, oko 0.45) LES i DNS znači 'Large-Eddy Simulations' i 'Direct Numerical Simulations'.

O modeliranju vjetra bure je bilo govora ranije u skripti, kad smo tumačili planinske valove. Tipičan dnevni hod ABL-a, u (t,z) polju gradijentnog Ri broja, je također bio prikazan prije. Detaljniji opisi ABL-a zahtijevaju direktnije opise turbulencije u smislu da se eksplicitno tretiraju, tj. razluče, bar najveći, točnije - dinamički najdominantniji vrtlozi; taj se pristup naziva LES ('Large-Eddy Simulations'). O modeliranju prijenosa i distribucije zračnih polutanata vidi u npr. Jeričević i sur. (2010). Najkompletnije atmosfersko modeliranje, tzv. DNS ('Direct Numerical Simulations') je još u povojima i čini se danas još uvijek samo za male vrijednosti Re , npr. do $Re \sim 500$. U DNS-u se simuliraju praktički svi turbulentni vrtlozi u strujanju. O eksplicitnom modeliranju duboke konvekcije se može pronaći u relevantnoj međunarodnoj literaturi, na različitim internet stranicama, itd.

Prikažimo pri kraju i tipične profile predifuzno modeliranog PBL-a, kako bismo ih mogli prepoznati u rezultatima numeričkih modela, te njihovu usporedbu s ispravnijim, tj. manje difuzivnim modeliranim profilima. Slika 17.6 prikazuje tipičnu evoluciju profila komponente vjetra i potencijalne temperature u stabilnom blago-nagnutom PBL-u hlađenom odozdo. Do predifuzivno modeliranog ABL-a može dovesti prevelika karakteristična duljina turbulentnog miješanja (Grisogono i Belušić 2008, Grisogono 2010).



Slika 17.6 Lijevo: modelirani profil vjetra u stabilnom nagnutom PBL-u s niskom mlaznom strujom: pune krivulje – predifuzivni profili (satne vrijednosti), crtkano – točniji profili (satne vrijednosti) što su u skladu s Prandtlovim modelom katabatičkog strujanja. Desno: kao i lijevo ali za potencijalnu temperaturu.

Neke od problema predifuzivnog PBL-a smo već bili dotakli kada smo govorili o Ekmanovom PBL-u. Ovime završavamo i zadnje poglavlje ove skripte; ono što još preostaje je kratak pregled, ili ponavljanje sveukupnog sadržaja izloženog ovdje.

Generalizirana duljina turbulentnog miješanja

Izvedimo generaliziranu karakterističnu duljinu miješanja, umjesto da ju *ad hoc* pretpostavimo, kao što se to najčešće radi. Polazimo od pojednostavljene jedn. za TKE:

$$\frac{\partial(TKE)}{\partial t} = -\overline{u'w'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{g}{\theta} \overline{w'\theta'} - \frac{\partial}{\partial z} \left[\overline{w' \left(\frac{p'}{\rho_0} + TKE \right)} \right] - \varepsilon \quad (1)$$

i pretpostavimo da se članovi transporta i preraspodjele mogu približno zanemariti, da vrijedi poopćena K-teorija i da za izvod ove duljine vrijedi stacionarnost TKE. Drugim riječima, lijeva strana od (1) postaje nula; nadalje, prva dva člana na desnoj strani se modeliranju pomoću $K_m = a_2 \Lambda (TKE)^{1/2}$, $K_h = a_2 \Lambda (TKE)^{1/2} / Pr$, gdje je a_2 konstanta modela, treći član zanemarujemo, a zadnji član, prema Kolmogorovljevoj pretpostavci o približnoj izotropnosti disipirajućih vrtloga, modeliramo kao $\varepsilon = b(TKE)^{3/2} / \Lambda$, gdje je b još jedna konstanta modela. Pri tome, $a_2, b < O(1)$.

Vertikalno smicanje srednjeg vjetra je $|S| = \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right|$ pa (1) postaje približno (Grisogono 2010):

$$K_m |S|^2 = K_h N^2 + \frac{b}{\Lambda} (TKE)^{3/2} \quad (2)$$

što nakon sređivanja (2) daje za generaliziranu duljinu turbulentnog miješanja Λ :

$$\Lambda = (b/a_2)^{1/2} \frac{TKE^{1/2}}{|S|} (1 - Ri/Pr)^{-1/2} . \quad (3)$$

Moguće su dalje prilagodbe u (3), ovisno o relaciji između Ri i Pr , vidi Sl. 17.5. Relacija (3) je ispravna za $0 \leq Ri$, tj. za statički neutralnu i stabilnu stratifikaciju i ne predviđa nestanak turbulencije ni za jako veliki Ri , sve dok postoji lokalna TKE (ova pak, može u određenim uvjetima biti i transportirana s drugog mjesta). Primijetimo da smo u pogl. 14 naveli relaciju $Pr \approx 0.8 + a Ri$ ($0.5 \leq a \leq 5$), što može biti osjetljivo u (3) obzirom na omjer Ri/Pr u pojedinom numeričkom modelu (vidi Sl. 17.5). Ipak, relacija (3) uspješno je korištena u simulacijama na Sl. 17.6 (crtkani profili) koristeći MIUU numerički mezoskalni model s parametrizacijom turbulencije zatvaranjem višeg reda (tzv. nivo 2.5).

U slučaju poznate disipacije TKE, tj. ε , mogu se definirati pripadne duljinske karakteristične skale turbulencije (ravnoteža između ε i redom: smicanja ili uzgona u jednostavnoj jedn. za TKE, odnosno, ravnoteže između inercijskih sila, u^3/L_K i ε uz $Re \approx 1$):

$$\begin{aligned} L_c &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{S^3}} \\ L_{oz} &= \sqrt{\frac{\varepsilon}{N^3}} \\ L_K &= \sqrt[4]{\frac{v^3}{\varepsilon}} \end{aligned} \quad (4)$$

gdje su to redom Corrsinova (iznad koje su vrtlozi deformirani smicanjem), Ozmidova (iznad koje su vrtlozi deformirani stratifikacijom) i Kolmogorovljeva skala turbulentnih vrtloga; pri tome $10L_K$ predstavlja aproksimativnu gornju granicu disipacijskog područja spektra turbulencije. Vrtloge veličine $L > L_c$ deformira osnovno smicanje tako da Reynoldsove napetosti prenose energiju turbulentnim fluktuacijama. Primijetimo da je Corrsinova skala implicitno uključena u (3) gdje je otpočetak pretpostavljeno u parametrizaciji ε da se disipacija uglavnom odvija na homogenim i skoro izotropnim vrtlozima (stoga u (1) do (3) $\varepsilon \sim (TKE)^{1.5}/\Lambda$). Parametrizacija karakteristične duljine turbulentnog miješanja za neutralno statički stabilno strujanje (3) povezuje glatko L_c i L_{oz} iz (4).

Kada postoji slobodni sloj smicanja $h(t)$ bez stratifikacije, onda se on spontano širi, kao i pripadni L_c , dok L_K opada. To ujedno znači i širenje pojasa vrtloga koji su premali da bi bili deformirani smicanjem, a opet, preveliki su da bi bili prigušeni viskoznošću; dakle, u ovom slučaju se inercijsko područje spektra turbulencije postupno širi u vremenu.

Ako se radi samo o stratificiranoj turbulenciji bez smicanja, onda se pripadni turbulentni sloj širi samo do određene debljine jer nema izvora energije koji bi balansirao gubitke zbog gušenja uzgonom i viskoznošću. Turbulencija tada vremenom nestaje ako nema dovođenja TKE-a. Početni L_{oz} mogao je tada biti i vrlo velik, ali vremenom opada, dok L_K raste. Stoga, se pripadno inercijsko područje vremenom suzuje i postupno nestaje (kada $L_{oz} \approx 10L_K$).

Za neke relativno jednostavne uzdignute (bez podloge) turbulentne slojeve koji se razvijaju u vremenu, poput npr. onih što posjeduju linearni profil vjetra i stratifikacije, pokazano je da približno vrijedi $L_{oz} \approx 2L_c$; ove skale brzo rastu u početnom vremenu, ali onda se kasnije smanjuju ako je stratifikacija dovoljno jaka. S druge pak strane, L_K u početku opada, ali onda

kasnije počne rasti. Nakon određenog vremena, što ovisi o konkretnom iznosu i obliku stratifikacije i smicanja, $10L_k$ može premašiti Ozmidovu i Corrsinovu skalu, što onda znači da su u takovom slučaju i osnovno smicanje i stratifikacija prisutni u disipacijskom području.

Na kraju, valja imati na umu da strukturne osobine turbulencije i vrtloga jako ovise o srednjem strujanju i pripadnom 3D smicanju, te o udaljenosti od rubova (podloge). Na primjer, vrtlozi koji udaraju u podlogu se deformiraju u 'palačinkaste' strukture, dok strujanje niz podlogu stvara izdužene strukture poput 'ukosnica' ili 'kobasica'. Pripadne razine neizotropije, karakterizirane npr. pomoću Reynoldsovog tenzora $\langle u_i' u_j' \rangle$, mogu biti slične u oba slučaja, ali je struktura pripadne turbulencije različita. Postoji puno turbulentnih strujanja koja uključuju i organizirano, periodično (neturbulentno) strujanje, ali i stohastičnu turbulenciju; takva strujanja se, u principu, ne mogu dobro opisati konvencionalnim Reynoldsovim usrednjavanjem. Svaki sloj smicanja s tzv. 'mladom' turbulencijom, kratko nakon prirodne tranzicije, sadrži značajne koherentne strukture. Na primjer, strujanje neposredno oko i preko relativno strme prepreke, često stvara i kvazi-periodičke strukture poput koherentnih zavjetrinskih vrtloga određene frekvencije.

[Ne]adekvatnost K-teorije

Nagla kontrakcija ili dilatacija strujanja, ili strujanje preko makar i blago zakrivljene podloge dovodi do neispravnosti K-teorije 1. reda. Pri takvim strujanjima ne vrijedi lokalnost veze između neizotropnih komponenti Reynoldsovog tenzora $\langle u_i' u_j' \rangle$, $i \neq j$ i komponenti smicanja srednje struje, $\langle \partial U_i / \partial x_j \rangle$. Primjeri takvih strujanja gdje ne vrijedi K-teorija 1. reda su strujanja u aksisimetričnim sužujućim ili proširujućim kanalima, strujanja između zgrada i oko mostova, vjetar preko zakrivljenog terena (s konkavnošću i/ili konveksnošću), itd. Tamo neizotropija strujanja sporo opada, ne zbog pripadnih smicanja srednje struje (koja može otići i u nulu), već zbog prethodne povijesti, „sjećanja“ napetosti kojem je turbulencija bila prethodno izložena (u prostoru i/ili u vremenu). Kao što je već bilo objašnjeno, karakteristična vremenska konstanta turbulencije je u takvim strujanjima veća ili barem usporediva s karakterističnom vremenskom konstantom srednjeg smicanja (koje, u principu, generira turbulenciju), tj. $\tau \geq 1$.

Ipak, u jednostavnim turbulentnim strujanjima sa smicanjem (npr. kružni mlazovi, horizontalni slojevi miješanja, strujanja u ravnim kanalima) osobine turbulencije i srednji gradijenti komponenta brzine mijenjaju se relativno sporo prateći srednje strujanje. Zato lokalni gradijenti komponenta srednje brzine dobro opisuju povijest srednje distorzije kojem je turbulencija podvrgnuta. Drugim rječima, tada je ravnoteža Reynoldsovog tenzora napetosti strujanja dominantno određena lokalnim procesima: produkcijom i disipacijom, dok su nelokalni procesi transporta tj. raspodjele relativno mali. U takvim slučajevima opravdana je hipoteza o vezi između $\langle u_i' u_j' \rangle$ i $\langle \partial U / \partial x_j \rangle$ tj. K-teorija. Tada se vrtložna ili turbulentna difuzija može opisati produktom kvadrata skale brzine turbulentnog strujanja i pripadne vremenske skale. U tako idealiziranim okolnostima onda se može povezati statistika turbulencije: karakteristični u^* postaje $\langle u^2 \rangle^{1/2}$ i vremenska skala τ postaje lagranžijanska integralna vremenska skala.

Kada to nije ispunjeno, dakle u nehomogenom ABL-u, pri kontrakciji ili dilataciji srednjeg strujanja, u strujanju iznad kompleksnog terena, ... K-teorija je neadekvatna. Tada treba koristiti barem tzv. 2.5 nivo zatvaranja parametrizacije turbulencije; u jako stabilnom ABL vjerojatno ni to neće biti dovoljno nego će trebati barem 3. nivo (prognoza TKE i $\langle \theta'^2 \rangle$), odnosno prognoza kompletnog seta kovarijanci turbulentnih polja, tj. nivo 4 zatvaranja parametrizacije. Dalje poboljšanje bi bio prijelaz na LES, umjesto RANS opisivanja gibanja.

18. ODABRANA POGLAVLJA IZ ATMOSFERSKE TURBULENCIJE

U ovom poglavlju dotičemo nekoliko lekcija iz naprednih kurseva o turbulenciji (poslijediplomska nastava) što se odnose na vrtložnost i zavojitost ili spiralnost (*vorticity*; *helicity*). Naprednim studentima ovo će pomoći shvatiti zašto rastezanje i zakretanje vrtložnosti (*stretching & tilting*) u prosjeku povećava 3D vrtložnost; nadalje, uvođenjem zavojitosti naznačiti će se uloga koherentnih struktura strujanja i njihova, u prosjeku, smanjena disipativnost (obzirom na manje, sporadične vrtloge).

Kao u npr. pogl. 14, koristimo tenzorski zapis Navier-Stokesovih (NS) jedn. gibanja:

$$\frac{\partial}{\partial t} u_i + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} p - \delta_{i3} g + f \varepsilon_{ij3} u_j + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} u_i, \quad (1a)$$

gdje su redom na desnoj strani: sila gradijenta tlaka po jedinici mase, uzgon, Coriolisova i viskozna sila, što na lijevoj strani ubrzavaju ili usporavaju fluid (točnije: mijenjaju polje brzine u_i). Za naše potrebe je razumno zanemariti Coriolisovu silu (tj. pripadno „vrtložno ubrzanje“) i pretpostaviti Boussinesqovu aproksimaciju. Ova pojednostavljenja za donju troposferu i procese unutar nekoliko sati, do $\sim 1/5$ dana, preko udaljenosti manjih od 100 km, neće bitno utjecati na rezultate diskusije u ovom poglavlju; pogreške mogu biti, u najgorem razumnom slučaju do $\sim 10\%$. Ako nas zanima samo horizontalna komponenta strujanja, onda je i 2. član na desnoj strani (1a) također nula. Primijenimo li divergenciju na (1a), dobijemo:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} p. \quad (2)$$

Izraz (2) predstavlja Poissonov tip eliptičke parcijalne diferencijalne jedn. koju općenito nije lako riješiti (pogotovo u kompliciranom prostoru). Fundamentalno, strukturno rješenje od (2) se može preuzeti iz npr. elektrostatike (veza električnog potencijala i naboja u prostoru je dana s volumnim integralom gustoće naboja podijeljenim s udaljenošću pripadne gustoće od točke gdje se računa potencijal). Nakon uvrštavanja dobijemo:

$$p(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{4\pi} \iiint_{Vol} \frac{\partial^2 (u_i' u_j')}{\partial x_i' \partial x_j'} \frac{dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (3)$$

što je ujedno i oblik partikularnog rješenja Greenovom funkcijom problema (2). Iz (3) čitamo da je tlak u nekoj točki prostora, $p(\vec{r})$, zadan integralom po cijelome prostoru, udaljenošću od promatrane točke otežanim faktorom ($1/(\text{udaljenost})$), od dvostrukih prostornih derivacija produkta komponenata brzine, $u_i u_j$, u $(\)'$ prostoru utjecaja ($=V'$). To kvalitativno znači da je promatrani tlak u određenoj točki (prividno lokalna veličina) određen postojećim poljem komponenata brzine (i pripadnim prostornim promjenama!), otežanim s udaljenošću od promatrane točke, u cijelome prostoru V' . Volumni integral dvostruko diferenciranog produkta komponenata brzine u (3), odgovara kovarijanci komponenata brzine što je dvostruko prostorno diferencirana i koja postupno opada s udaljenošću (efekt dalekog polja, *'far-field effect'*). Drugim rječima, tlak nije lokalna, već globalna veličina (polje) koje je u potpunosti određeno poljem brzine. Dakle, uz zadane pretpostavke, tlak kao takav u ovakvoj klasi strujanja uopće nije potreban! Uz ovdje preuzete pretpostavke, ovo je bitno drugačiji zaključak od onoga u kvazigeostrofičkoj teoriji, važećoj za izvantropske širine, gdje polje tlaka određuje polje strujanja

na makro-skali. Zaključak iz (2) i (3) je sličniji onome za tlak u tropskom području gdje polje brzine određuje polje tlaka.

Na osnovi (1) do (3) moguće je, u principu, doći to prognoze polja strujanja razvojem u red brzine po malom inkrementu vremena Δt . Za dopunsko tumačenje NS jedn. uz uvažene pretpostavke o barotropnosti i nestlačivosti (radi matematičke i fizičke jednostavnosti) prikladno je raspisati (1) u alternativnom obliku tako da se preurede advektivni i viskozni članovi; dobijemo:

$$\frac{\partial}{\partial t} u_i = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{\rho_0} p + \frac{1}{2} u_j^2 \right) - \delta_{i3} g + \varepsilon_{ijk} u_j \omega_k + f \varepsilon_{ij3} u_j - \nu \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \omega_k, \quad (1b)$$

gdje 1. član na desnoj strani predstavlja utjecaj gradijenta statičkog i dinamičkog tlaka, 2. član je ubrzanje sile teže, 3. Član je vrtložno, odnosno „poprečno“ ubrzanje (ima donekle sličnu formu kao i Coriolisovo ubrzanje, tj. 4. član) i 5. član je efekat viskoznosti prikazan uz pomoć promjene vrtložnosti u prostoru. Iz (1b) i (2) naslućujemo da bi pripadne poprečne dvostruke derivacije produkata komponenata brzine mogle predstavljati kvadrate vrtložnosti i advekciju laplasijena brzine u (3); u svakom slučaju, radi se o kvadratno nelinearnoj dinamici.

Iz (1b) je očito da u nerotirajućem fluidu otpadaju 3 posljednja člana a inercijalni član akceleracije se svodi na gradijent dinamičkog tlaka, $\frac{1}{2} u_j^2$. U tome slučaju (1) postaje Bernullijeva jedn. Naravno, u turbulentnom strujanju ti uvjeti nisu ispunjeni. Stoga možemo zaključiti da su za turbulenciju ključni članovi s rotacijom u NS jedn. i onda, njihovo međudjelovanje s preostalim članovima u jedn. Dalje ćemo se pozabaviti s vrtložnošću. Nadalje, primijetimo donekle neobičnu formu viskoznog djelovanja u NS jedn: zadnji član u (1b) ukazuje da je viskozno trenje i pripadno kočenje strujanja određeno poprečnim prostornim promjenama vrtložnosti. Te promjene u prosjeku i po apsolutnom iznosu moraju biti pozitivne.

1| 3D polje vrtložnosti

Primjenom rotacije na (1), tj. $\varepsilon_{pqi} \partial/\partial x_q$ (gdje ne smijemo a priori ponoviti indekse već postojećih članova rotacije) uz iste maloprijašnje pretpostavke (bez Coriolisove sile, uz nestlačivost), te uz zanemarivanje uzgona (uz uzgon na desnoj bi se strani još pojavio član $i_x \partial b/\partial y - j_y \partial b/\partial x$, ili $\varepsilon_{ijk} \partial b_3/\partial x_j$, svakako bez vertikalne komponente), dobije se

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega_i + u_j \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \omega_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \omega_i, \quad (4)$$

gdje lijeva strana predstavlja uobičajeni tenzor polja promjene vrtložnosti, tj. $D\omega_i/Dt$, a na desnoj strani je rastezanje i zakretanje vrtložnosti, te viskozna disipacija vrtložnosti (vidi se opet da polje tlaka ne igra ulogu u barotropnoj dinamičkoj ravnoteži opisanoj s (4)). Slučaj s uzgomom je tretiran u 9. poglavlju proučavajući razvoj rotacije u superćelijama, jedn. (1) do (4).

Prosječnu vrtložnost u prostoru dobijemo volumnim integralom od (4). Pretpostavimo da je normalna komponenta brzine na granici prostora nula (nema izvora i ponora brzine), tj. prostor je nepropustan za fluid. To znači:

$$V \frac{\partial}{\partial t} \bar{\omega}_i = -\int_{Vol} \frac{\partial(u_j \omega_i)}{\partial x_j} dV + \int_{Vol} \frac{\partial(\omega_j u_i)}{\partial x_j} dV + \nu \int_{Vol} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \omega_i dV, \quad (5)$$

pri tome, potez iznad 1. člana lijeve strane od (5) znači prostorni prosjek (korišten teorem o srednjoj vrijednosti).

Koristeći teorem Gauss-Ostrogradskog, za prijelaz volumnog integrala u površinski integral koji potpuno obuhvaća pripadni volumen, slijedi

$$V \frac{\partial}{\partial t} \overline{\omega_i} = -\iint_S u_j \omega_i n_j dS_j + \iint_S \omega_j u_i n_j dS_j + \nu \iint_S \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \omega_i \right) n_j dS_j, \quad (6)$$

gdje je 1. član na desnoj strani nula jer je prostor nepropustan pa je $u_j n_j$ na granici prostora nula; stoga u (6) preostaju samo 3 člana.

Pretpostavimo li da postoji stacionarno stanje za prostorno usrednjenu vrtložnost, tj. da lijeva strana od (6) postane nula, onda preostali 2. član na desnoj strani nužno mora biti pozitivan jer je zadnji, 3. član, tj. viskozno gušenje vrtložnosti nužno (po svojoj prirodi) negativan (u prosjeku viskozno guši vrtložnost). Ovaj plauzibilni zaključak provodimo detaljno u idućem odlomku.

Usporedno računom (4) do (6), možemo (4) prvo pomnožiti s ω_i i onda integrirati kao u (5) i (6). To dovodi do:

$$V \frac{\partial}{\partial t} \frac{\overline{\omega_i^2}}{2} = -\iint_S u_j n_j \frac{\omega_i^2}{2} dS_j + \int_{vol} \omega_i \omega_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dV - \nu \int_{vol} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \omega_i \right)^2 dV, \quad (7)$$

pri čemu je u raspisu zadnjeg člana korištena činjenica da je viskozna difuzija puno slabija od viskozne disipacije pa je time zanemaren član $\nu \partial(\omega_i (\partial\omega_i/\partial x_j))/\partial x_j = \nu \Delta \omega^2$. Nadalje, 1. član na desnoj strani od (7) je opet nula (to je sudbina advekcije u zatvorenom prostoru) i sada, ako je u prosjeku kvadrat vrtložnosti očuvan (što općenito nije ispunjeno), tj. ako je lijeva strana od (7) nula, onda slijedi da je

$$\int_{vol} \omega_i \omega_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dV \approx \nu \int_{vol} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \omega_i \right)^2 dV. \quad (8)$$

Budući da je integrand desne strane pozitivan ili nula, slijedi da je rastezanje i savijanje vrtložnosti u prosjeku također pozitivno (ili nula); to dovodi do zaključka da u prosjeku rastezanje i savijanje vrtložnosti povećava vrtložnost jer je

$$\overline{\omega_i \omega_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \geq 0. \quad (9)$$

Budući da se srednji kvadrat vrtložnosti općenito mijenja u vremenu, onda (7) ima skraćeni zapis:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\overline{\omega_i^2}}{2} = \overline{\omega_i \omega_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} - \nu \overline{\left(\frac{\partial}{\partial x_j} \omega_i \right)^2}, \quad (10)$$

što opet pokazuje da u prosjeku rastezanje i savijanje vrtložnosti, tj. 2. član na desnoj strani (10) mora biti pozitivan i stvarati vrtložnost (jer je zadnji član sam po sebi nužno pozitivan, ali ima ispred sebe negativan predznak).

2| Zavojitost

Solenoidnost ili zavojitost je skalarni produkt vrtložnosti i brzine; trivijalno je nula u 1D i 2D. Zavojitost je mjera očuvanosti višedimenzijskog koherentnog (ne slučajnog) strujanja. Do razvoja zavojitosti dolazimo povezivanjem prognostičke jedn. vrtložnosti i brzine barotropnog strujanja, tj. u najjednostavnijem slučaju, množeći (4) s u_i , zatim pojednostavljenu jedn. gibanja s ω_i , zbrajajući te jednačbe i onda integrirajući po zatvorenom prostoru. Dakle,

$$u_i \frac{\partial}{\partial t} \omega_i + u_i u_j \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = u_i \omega_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \nu u_i \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \omega_i,$$

$$+$$

$$\omega_i \frac{\partial}{\partial t} u_i + \omega_i u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\omega_i}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \omega_i \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} u_i.$$

Integracija gornjeg izraza daje:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{Vol} u_i \omega_i dV = - \int_{Vol} \frac{\partial(u_i u_j \omega_i)}{\partial x_j} dV + \int_{Vol} \omega_j \frac{\partial u_i^2 / 2}{\partial x_j} dV - \int_{Vol} \frac{\partial(\omega_i p / \rho_0)}{\partial x_i} dV + \nu \int_{Vol} [u_i \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x_j^2} + \omega_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}] dV$$

odnosno,

$$V \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} = - \iint_S u_j h n_j dS_j + \iint_S n_j \omega_j (EK) dS_j - \iint_S n_i \omega_i \frac{p}{\rho_0} dS_i + \nu \int_{Vol} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x_j^2} - 2 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \right) dV, \quad (11)$$

gdje je $h \equiv u_i \omega_i$ lokalna gustoća zavojitosti (pozitivna ili negativna) i $EK \equiv (u_i^2 / 2)$ je kinetička energija (točnije pripadna gustoća kin. en.). U razvoju zavojitosti primijetimo da 1. član na desnoj strani otpada zbog nepropustnosti domene integracije pa (11) možemo kompaktnije napisati kao

$$V \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} = \iint_S n_j \omega_j [EK - \frac{p}{\rho_0}] dS_j + diff(h) - 2\nu \int_{Vol} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \right) dV. \quad (12)$$

Predzadnji član u (12), tj. viskozna difuzija solenoidnosti, puno je manji od zadnjeg člana (disipacija solenoidnosti), po uzoru na razvoj turbulentnih tokova gdje smo zaključili slično. Prvi član na desnoj strani predstavlja produkciju (ili destrukciju) od h na rubovima domene. Ako nema vrtložnosti na rubovima domene (što je teško održiva pretpostavka), ili je u prosjeku $EK = p/\rho_0$, onda samo disipacija može utjecati (smanjivati) zavojitost (eventualno do nule), tj.

$$V \frac{\partial H}{\partial t} \approx -2\nu \int_{Vol} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \right) dV. \quad (13)$$

Odnosno, ako je strujanje neviskozno, srednja vrijednost zavojitosti, H , je očuvana, tj. $H = const$ u Eulerovim fluidima (nema viskoznosti!) bez vrtložnosti na rubovima domene. U prosjeku je za očekivati da je prostorni porast ili pad određene komponente vrtložnosti, koreliran s pripadnim

porastom ili padom pripadne komponente brzine pa je na taj način zadnji integrand u (12) i (13) uglavnom pozitivan; onda se i viskozna disipacija ponaša u skladu s fizikalnom intuicijom.

Općenito se smatra da solenoidne (engl. *helical*) strukture u strujanju imaju malu disipaciju i da relativno dugo mogu opstati. Ako je to istina, onda se može očekivati da su koherentne strukture u gibanju (tj. forme velikog H), uglavnom razdvojene od područja gibanja gdje je velika disipacija. Nadalje, iz identiteta za produkt kvadrata brzine i vrtložnosti slijedi da gdje je veliki h , mali je vektorski produkt između polja brzine i vrtložnosti, tj.

$$\begin{aligned} |\vec{u}|^2 |\vec{\omega}|^2 &= |\vec{u} \times \vec{\omega}|^2 + |\vec{u} \cdot \vec{\omega}|^2 \\ |\vec{u}|^2 |\vec{\omega}|^2 &= (u\omega)^2 [\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi] \end{aligned} \quad (14)$$

gdje je φ kut između pripadnih vektora polja brzine i vrtložnosti. Veća relativna kolinearnost između $\vec{u}, \vec{\omega}$ smanjuje vektorski produkt brzine i vrtložnosti, i obrnuto. Primijetimo da se vektorski produkt brzine i vrtložnosti (odgovara 1. članu u gornjoj desnoj strani od (14)) javlja i u NS jednadžbama gibanja (1); to je bitan dio advektivnih članova ubrzanja. Donekle sličan član postoji i zbog Coriolisove sile (tamo $\omega \rightarrow f$). Član $\vec{u} \times \vec{\omega}$ je odgovoran za kaskadu s većih na manje prostorne skale, to je način na koji veće 3D skale odumiru u gibanju. S druge pak strane, lokalno relativno veliki h znači i lokalno relativno slabu kaskadu vrtloga, tj. približnu očuvanost zavojitosti (tj. bez značajnog rastezanja i savijanja vrtloga i pripadnog disipiranja).

Danas se još uvijek zavojitost jako teško mjeri jer je teško izmjeriti vrtložnost. Stoga se i malo zna o koherentnim strukturama u atmosferi na mezo- i mikro-skali (npr. o tranzijentnim vrtlozima iznad mora, oko planina i otoka, itd.). Vjerojatno je da će napredak u daljinskim mjerenjima, posebice u radarskoj meteorologiji, te poboljšanja u tehnikama avionskih mjerenja dovesti do kvalitetnijih spoznaja o atmosferskoj zavojitosti i koherentnim strukturama na relativno malim skalama.

3] Richardsonov doprinos: (ne)defirencijabilnost brzine

Lewis Richardson je među 10-ak najvažnijih fizičara fluida i meteorologa svih vremena. Između ostaloga, on je prvi pokazao da ako se prihvati da je turbulentna difuzija proporcionalna disipaciji i difuziranoj površini, do na pripadne potencije, tada razlika između brzine strujanja dviju česti može postati nediferencijalna funkcija za male međusobne udaljenosti tih česti. To dovodi do nepoznavanja detalja strujanja na maloj skali i kaotičnosti gibanja, što direktno ukazuje na bit turbulencije na maloj 3D skali – slučajnost gibanja. Promatramo promjenu dobro definirane površine $\langle R^2 \rangle$, usrednjene po ansamblu, koja se u vremenu mijenja; ta promjena može biti mjera turbulentnog koeficijenta difuzije koja ovisi kao $K_m \sim \varepsilon \langle R^2 \rangle^\beta$, ($\rightarrow \alpha = 1/3, \beta = 2/3$), tj.

$$\begin{aligned} d \frac{\langle R^2 \rangle}{dt} &= a_0 \varepsilon^{1/3} \langle R^2(t) \rangle^{2/3}, \\ \langle R^2 \rangle^{1/3} &= \langle R^2(0) \rangle^{1/3} + \frac{a_0}{3} \varepsilon^{1/3} t, \\ \langle R^2 \rangle &= [\langle R^2(0) \rangle^{1/3} + a_0 \varepsilon^{1/3} t]^3. \end{aligned} \quad (15)$$

Vidimo iz (15) da neovisno koliko je mala početna površina difuzirane plohe $R^2(0)$, ona brzo i nelinearno raste u vremenu. Početna relacija za (15) je važna između ostaloga i zato što je to i prvi heuristički (skicirajući) dokaz Kolmogorovljevog „4/3 zakona“, jednog od najnetrivijalnijih

zakona izvedenih iz NS jednadžbi tek 15-ak godina kasnije, tj. nakon Richardsonova heurističkog tumačenja za $K_m \sim R^{4/3}$ (jer iznad (15): $m^2 s^{-1} = (m^2 s^{-3})^\alpha m^\beta$).

Nadalje, pretpostavimo da se brzine česti (a onda i njihova razlika) u dvije točke međusobno udaljene R mogu zapisati kao

$$\bar{v}(\bar{x}) = \frac{d\bar{x}}{dt}, \text{ odnosno : } \bar{v}(\bar{x} + \bar{R}) = \frac{d(\bar{x} + \bar{R})}{dt},$$

$$\delta\bar{v}(\bar{R}) = \frac{d\bar{R}}{dt}.$$

Pomnožimo tu razliku brzina skalarno s $2\bar{R}$, usrednjimo po ansamblu uz blagu pretpostavku da d/dt i usrednjavanje $\langle \rangle$ komutiraju. Slijedi:

$$\langle 2\bar{R} \cdot \delta\bar{v} \rangle = \frac{d}{dt} \langle R^2 \rangle,$$

$$\langle 2R\delta v \rangle \sim \varepsilon^{1/3} \langle R^2 \rangle^{2/3} | : R$$

$$\delta v \sim \varepsilon^{1/3} R^{1/3} \tag{16}$$

$$\frac{d\delta v}{dR} \sim \varepsilon^{1/3} R^{-2/3}.$$

To znači da

$$\lim_{R \rightarrow 0} \frac{d\delta v}{dR} \rightarrow \infty, \tag{17}$$

tj. prostorna promjena brzine nije uvijek dobro definirana veličina (konkretno, za male pomake R , gdje je R značajno dulji od slobodne duljine molekularnog miješanja, tj. i dalje vrijedi $Re \gg 1$). Ovo navodi na zaključak da je difuzija veličina koja bitno ovisi o skali promatranog procesa. To nas vodi u srž problema turbulencije jer na proizvoljno maloj skali gibanja, uz ogroman Re broj, razlika brzine dviju lagranžijanskih česti, podijeljena njihovom međusobnom udaljenošću, može biti jako velika (vidi (17)). Uočimo da se $\delta v \sim (\varepsilon R)^{1/3}$ u (16) može zaključiti i iz skaliranja advektivnog i disipacijskog dijela TKE jedn.

Richardson je na osnovi ovakvog razmatranja postavio poslovično, naizgled smiješno pitanje: da li vjetar (uvijek) ima brzinu? Upravo prikazan plauzibilni izvod pokazuje da vjetar, konkretno, razlika brzine dviju česti, nije uvijek diferencijabilna funkcija pa stoga vjetar i nema uvijek dobro definiranu brzinu!

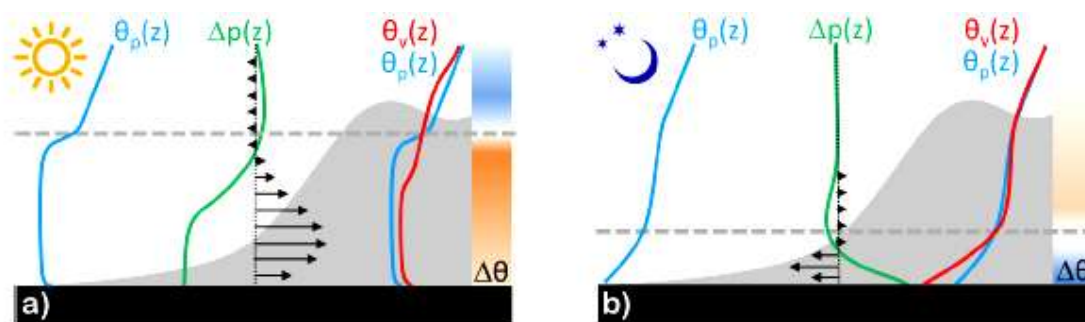
4| Ostalo

Postoji niz znanstvenih radova i ostale literature na naprednom nivou što se odnose na odabrana poglavlja o CABL-u i SABL-u. Neki od tih radova o CABL-u su npr. Sorbjan (1988, 1989), Fedorovich i Conzemius (2008), itd; dok o SABL-u su npr. Mahrt (1998), Zilitinkevich i sur. (2013), Sun i sur. (2015), itd. Ta zanimljiva istraživanja ostaju za različita odabrana poglavlja iz dinamičke meteorologije, atmosferske turbulencije, numeričko modeliranje i obradu vremenskih

nizova podataka. Radi lakšeg snalaženja u proučavanju nekih od naprednih poglavlja ABL-a iznad kompleksnog terena, ispod su dane ilustracije idealiziranog strujanja u dolini, CABL-a i SABL-a iznad planinskog terena (Serafin i sur. 2018).

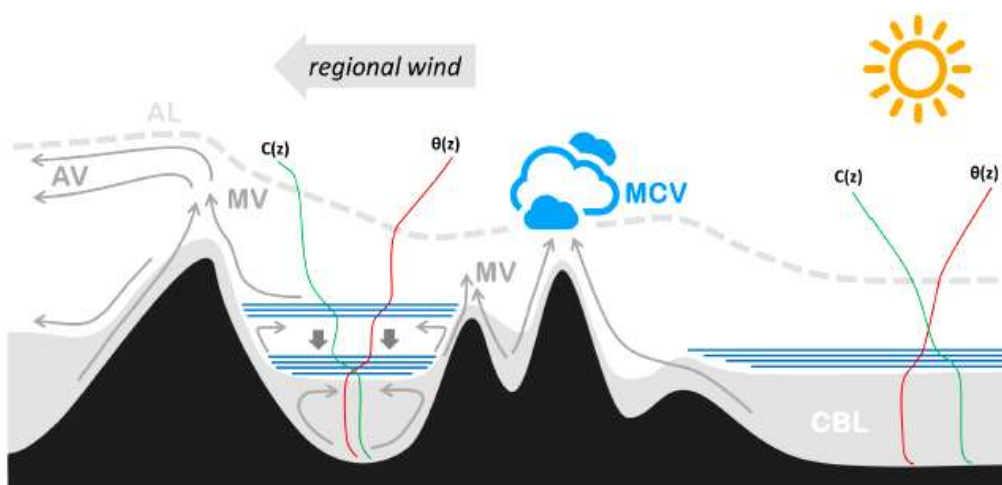
Planinski atmosferski granični slojevi

Vjetar duž planinsku dolinu je, u principu, rezultat veće amplitude temperaturne oscilacije zraka u dolini obzirom na onu u atmosferi iznad ravne površine. U usporedbi sa strujanjem na kosini, za što smo koristili Prandtlov model, dolinski vjetar se razvija na nešto duljoj vremenskoj skali. Na Sl. 18.1 prikazani su idealizirani profili strujanja u dolini.



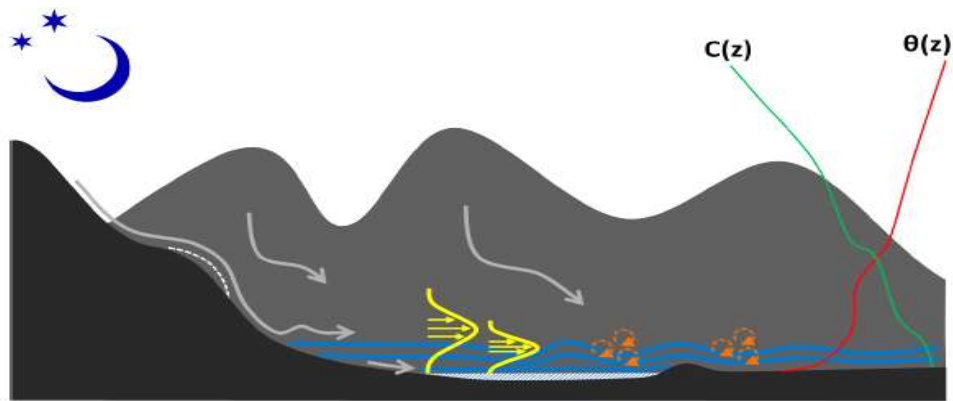
Slika 18.1 Profili termalno tjeranog vjetra u dolini (crveno) horizontalnog dna a) danju, b) noću u usporedbi sa strujanjem iznad ravne površine (plavo). Najveće razlike, $\Delta\theta$, su često puta pri vrhu planine; horizontalne razlike tlaka, Δp , rezultiraju kvazihidrostatski od vertikalno integrirane temperaturne razlike i obično su najveće pri dnu doline.

Procesi razmjene skalara i različitih tvari u planinskom ABL-u pod direktnim su utjecajem spomenute termalno tjerane dinamike, komplicirani su i nisu do kraja shvaćeni do danas. Idealizirani primjer pripadnog CABL-a je na Sl. 18.2.



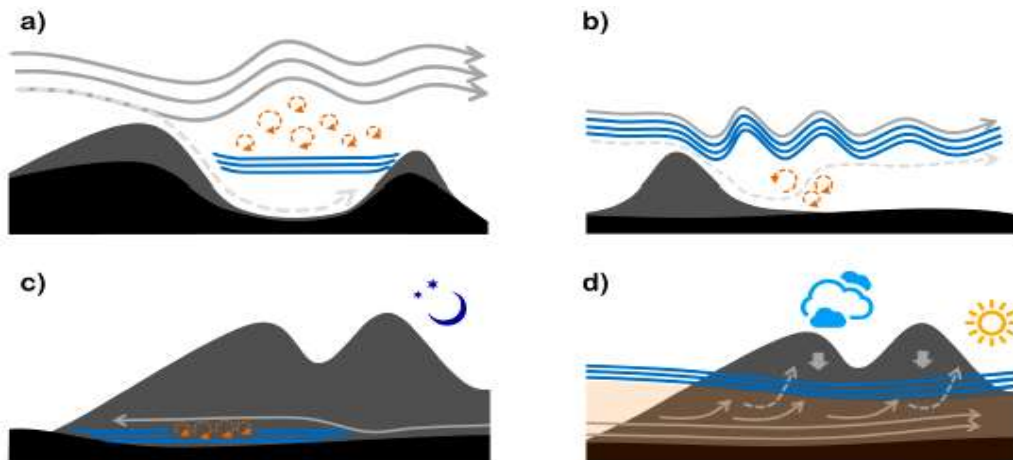
Slika 18.2 Ilustracija procesa razmjene u dnevnom planinskom ABL-u. Sivo je sloj miješanja, CBL; MV, AV i MCV znače planinsko, advektivno „planina-oblak“ ventiliranje. Strelice predstavljaju strujanje, $C(z)$ i $\theta(z)$ su profili koncentracije polutanata i pot. temp. Horizontalne plave linije znače pojačanu statičku stabilnost (favorizira razdvajanje uzlaznog vjetra od tla). Deblje silazne strelice znače subsidenciju u jezgri doline. Crtkana linija je vrh regionalnog sloja aerosola.

Noću nerjetko dolazi do dinamičkog razdvajanja (*decoupling*) između prizemnog bazena hladnog zraka i strujanja iznad, koje može biti sinoptički (dinamički) ili termalno tjerano. Stratifikacija hladnih bazena smanjuje intenzitet turbulencije, ali čak i u takvim stabilnim uvjetima moguće je turbulentno miješanje malim vrtlozima. Kratkotrajne epizode takvog miješanja se mogu dogoditi kad je smicanje vjetra kroz vrh hladnog bazena, tj. jezera hladnog zraka, dovoljno jako da smanji Ri i dovede do privremene dinamičke nestabilnosti. Slika 18.3 skicira idealizirani noćni planinski SABL. Vjetar i naoblaka su najbolji indikatori za pojavu ujezerivanja hladnog zraka („*cold air pooling*“).



Slika 18.3 Noćni procesi u planinskom SABL-u. Jako radijativno hlađenje dna doline stvara stabilni sloj pri tlu (plavo). Razvija se silazno odvodno strujanje (*drainage flow*) niz padine. Uzgonski valovi mogu propagirati niz vrh najstabilnijeg prizemnog sloja. Pojačano smicanje u dolinama vala pojačava turbulenciju, to ponekad dovodi do lokalnog sporadičnog miješanja (narančasti vrtlozi). Česte niske mlazne struje su prikazane žuto, dok $\theta(z)$ i $C(z)$ prikazuju profile pot. temp. i koncentracije polutanata.

Zbog svega spomenutog, tranzijentni procesi u ABL-u iznad kompleksnog terena, kao što je planinski, urbani, itd. nisu još sasvim razjašnjeni. Nepotrebno je naglašavati da tamo obična K-teorija 1. reda nema smisla, osim ponekad u idealiziranim 1D strujanjima. Na Sl. 18.4 je ponuđen sukes nekkih kompleksnih procesa i njihovih međudjelovanja u planinskom SABL-u.



Slika 18.4 Uloge stratificiranih slojeva (plavo) u kontroli višeskalnih procesa u planinskom SABL-u. Idealizirano: a) strujanje u dolini sa (sivo kontinuirano), ili bez (sivo crtano) stabilnog sloja ispod planinskog vrha, izdignuta tubulencija (narančasti vrtlozi) i mali valovi, ili

prozračivanje doline i veliki valovi; b) strujanje preko izolirane planine sa (sivo kontinuirano), ili bez (sivo crtkano) niske inverzije iznad planine, gdje se u 1. slučaju javljaju nehidrostatički zavjetrinski valovi, a u 2. slučaju stvara se veliki hidrostatički val koji može dovesti do separacije ABL-a i turbulencije (narančasti vrtlozi); c) turbulentna erozija prizemnih stabilnih slojeva ispod strujanja niz dolinu; d) djelomično zarobljavanje vlažnog zraka ispod stabilnog sloja tijekom dana; termalno tjerani vjetar advektiva zrak iz okolne ravnice uz planinu (sivo), dio tog strujanja probija stabilni sloj i ventilira planinski zrak (crtkano sivo) dok spuštanje zraka u jezgri doline (sive strelice prema dolje) spuštaju stabilne slojeve.

Postaje očito da je precizna prognoza vremena za planinske krajeve izuzetno zahtjevna i nerjetko nemoguća uz postojeća motrenja i operativne numeričke prognostičke modele. Nedovoljnim poznavanjem atmosferskih procesa iznad kompleksnog terena, prirode i nedostatka teorije, nemoguće je adekvatno parametrizirati i modelirati pripadno strujanje gdje horizontalna homogenost ne postoji, već se radi o povećanju vremenskih i prostornih skala relevantnih atmosferskih procesa (npr. Zardi i Whiteman 2013; Serafin i sur. 2018).

19. LITERATURA

- Acheson, D.J., 1990: *Elementary Fluid Dynamics*. Oxford. 397 pp.
- Axelsen, S.L., 2010: Large-eddy simulation and analytical modelling of katabatic winds. Disertacija, IMAU, Sveuč. u Utrechtu, Nizozemska, ISBN 978-90-393-5256-4, 157 str.
- Axelsen, S.L. i H. van Dop, 2009: Large-eddy simulation of katabatic wind. Part I: Comparison with observations. *Acta Geophysica*, **57**, 803-836. doi: 10.2478/s11600-009-0041-6 .
- Baklanov, A. i B. Grisogono (urednici), 2007: *Atmospheric Boundary Layers Nature, Theory and Applications to Environmental Modelling and Security*. Springer, 241 pp.
- Belušić, D. i Z. B. Klaić, 2004: Estimation of bora wind gusts using a limited area model. *Tellus*, **56A**, 296-307.
- Belušić, D., M. Pasarić, Z. Pasarić, M. Orlić i B. Grisogono, 2006: On local and non-local properties of turbulence in the bora flow. *Meteorol. Z.* **15**, 301-306.
- Belušić, D., B. Grisogono i Z. B. Klaić, 2007a: Atmospheric origin of the devastating coupled air-sea event in the east Adriatic. *J. Geophys. Res.* **112**, D17, 17111-17124. doi: 10.1029/2006JD008204.
- Belušić, D., M. Žagar i B. Grisogono, 2007b: Numerical simulation of pulsations in the bora wind. *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.* **133**, 1371-1388, DOI: 10.1002/qj.129
- Berger, B.W. i B. Grisogono, 1998: The baroclinic, variable eddy viscosity Ekman layer. An approximate analytical solution. *Bound.-Layer Meteorol.* **87**, 363-380.
- Clark, P.A. i S.L. Gray, 2018: Sting jets in extratropical cyclones: a review. *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.* **144**, 943-969.
- Constantin, A. i R.S. Johnson, 2019: Atmospheric Ekman flows with variable eddy diffusivity. *Bound.-Layer Meteorol.* **170**, 395-414.
- Cullen, M.J.P., 2006: *Large-scale atmospheres/ocean flow*. Imperial College Press, London, 259 str.
- Cuxart, J., 2015: When can a high-resolution simulation over complex terrain be called LES? *Frontiers in Earth Science*. **3**, doi: 10.3389/feart.2015.00087
- Denby, B., 1999: Second-order modelling of turbulence in katabatic flows. *Bound.-Layer Meteorol.* **92**, 67-100.
- Dörnbrack, A, S. Gisinger, N. Kaifler, T.C. Portele, M. Bramberger, M. Rapp, M. Gerding, J. Söder, N. Žagar i D. Jelić, 2018: Gravity waves excited during a minor sudden stratospheric warming. *Atmos. Chem. Phys.* **18**, 12915-12931.
- Enger, L. i B. Grisogono, 1998: The response of bora-type flow to sea surface temperature. *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.* **124**, 1227-1244.
- Fedorovich, E. i R. Conzemius, 2008: Effects of wind shear on the atmospheric convective boundary layer structure and evolution. *Acta Geophysica*, **56**, 114-141.

- Grisogono, B., S.C. Pryor and R.E. Keislar, 1993: Mountain wave drag over double bell-shaped orography. *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.* **119**, 199-207.
- Grisogono, B., 1995: A generalized Ekman layer profile within gradually-varying eddy diffusivities. *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.* **121**, 445-453.
- Grisogono, B., 2003: Post-onset behaviour of the pure katabatic flow. *Bound.-Layer Meteorol.* **107**, 157-175.
- Grisogono, B. i J. Oerlemans, 2001a: Katabatic flow: analytic solution for gradually varying eddy diffusivities. *J. Atmos. Sci.* **58**, 3349-3354.
- Grisogono, B. i J. Oerlemans, 2001b: A theory for the estimation of surface fluxes in simple katabatic flows. *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.* **127**, 2725-2739.
- Grisogono, B. i L. Enger, 2004: Boundary-layer variations due to orographic wave-breaking in the presence of rotation. *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.* **130**, 2991-3014.
- Grisogono, B., L. Kraljević i A. Jeričević, 2007: The low-level katabatic jet height versus Monin-Obukhov height. *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.* **133**, 2133-2136.
- Grisogono B., and D. Belušić, 2008: Improving mixing length-scale for stable boundary layers. *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.* **134**, 2185-2192.
- Grisogono, B. and D. Belušić, 2009: A review of recent advances in understanding the meso- and micro-scale properties of the severe Bora wind. *Tellus*, **61A**, 1-16.
- Grisogono, B., 2010: Generalizing “z-less” mixing length for stable boundary layers. *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.*, **136**, 213-221.
- Grisogono, B., 2011: The angle of the near-surface wind-turning in weakly stable boundary layers. *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.* **137**, 700-708.
- Grisogono, B. and S. L. Axelsen, 2012: A note on the pure katabatic wind maximum over gentle slopes. *Bound.-Layer Meteorol.*, **145**, 527-538.
- Grubišić, V., 2004: Bora-driven potential vorticity banners over the Adriatic. *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.* **130**, 2571-2603.
- Haiden, T., 2003: On the pressure field in the slope wind layer. *J. Atmos. Sci.*, **60**, 1632-1635.
- Holton, J.R., 1992 (ili 2004): *An Introduction to Dynamic Meteorology*. Academic Press, 3rd edition (or 4th edition), San Diego, USA, 511 pp.
- Jeričević, A. i B. Grisogono, 2006: The critical bulk Richardson number in urban areas: verification and application in a numerical weather prediction model. *Tellus*, **58A**; 19-27.
- Jeričević, A. L. Kraljević, B. Grisogono, H. Fagerli i Ž. Večenaj, 2010: Parameterization of vertical diffusion and the atmospheric boundary layer height determination in the EMEP model. *Atmos. Chem. Phys.* **10**, 341-364.

- Kavčič, I. i B. Grisogono, 2007: Katabatic flow with Coriolis effect and gradually varying eddy diffusivity. *Boundary-Layer Meteorol.* **125**, 377-387.
- Klemp, J.B., 1987: Dynamics of tornadic thunderstorms. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **19**, 369-402.
- Klemp, J.B. i D.R. Durran, 1987: Numerical modelling of Bora winds. *Meteorol. Atmos. Phys.* **36**, 215-227.
- Knippertz, P., 2008: Dust emissions in the West African heat trough – the role of the diurnal cycle and of extratropical disturbances. *Meteorol. Z.*, **17**, 553-563.
- Kraljević, L. i B. Grisogono, 2006: Sea-surface temperature effects on 3D Bora-like flow. *Meteorol. Z.* **15**, 169-178.
- Kundu, P.K. i I.M. Cohen, 2002: *Fluid Mechanics*. Academic Press, 2nd ed. 730 pp.
- Lesieur, M., 1997: *Turbulence in Fluids*. Kluwer (3rd edition), Dordrecht, the Netherlands, 515 pp.
- Lin, Y.-L., 2007: *Mesoscale Dynamics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 630 pp.
- Logan, J.D., 2008: *An Introduction to Nonlinear Partial Differential Equations*. Wiley-Interscience, Hoboken, New Jersey, 397 str., 2. izdanje.
- Mahrt, L., 1982: Momentum balance of gravity flows. *J. Atmos. Sci.* **39**, 2701-2711.
- Mahrt, L., 1998: Stratified atmospheric boundary layers and breakdown of models. *Theoret. Comput. Fluid Dyn.* **11**, 263-279.
- Mahrt, L. and D. Vickers, 2003: Formulation of turbulent fluxes in the stable boundary layer. *J. Atmos. Sci.* **60**, 2538-2548.
- Mahrt, L., 2007: The influence of small-scale nonstationarity on the turbulent flux for stable stratification. *Bound.-Layer Meteorol.* **125**, 245-264.
- Mauritsen, T., G. Svensson, S. Zilitinkevich, I. Esau, L. Enger i B. Grisogono, 2007: A total turbulent energy closure model for neutral and stably stratified atmospheric boundary layers. *J. Atmos. Sci.* **117**, 259-273.
- Mesinger, F., 1976: Dinamička Meteorologija. *Građevinska knjiga, Beograd*, 224 str.
- Mohorovičić, A. 1889: Interessante Wolkenbildung über der Bucht von Buccari (with a comment from the editor J. Hann). *Meteorol. Z.* **24**, 56-58.
- Nappo, C.J., 2002: *An Introduction to Atmospheric Gravity Waves*. Academic Press, San Diego, USA, 276 pp.
- Orf, L., R. Wilhelmson, B. Lee, C. Finley i A. Houston, 2017: Evolution of a long-track violent tornado within a simulated supercell. *Bull. Amer. Meteor. Soc.* **98**, 45-62.
- Prandtl, L., 1942: *Führer durch die Strömungslehre*. Vieweg und Sohn, Braunschweig. 373-375, 648 pp.

- Princevac, M., H. J. S. Fernando i C.D. Whiteman, 2005: Turbulent entrainment into natural gravity-driven flows. *J. Fluid Mech.* **533**, 259-268.
- Pedlosky, J., 1987: *Geophysical Fluid Dynamics*. Springer-Verlag, New York (2nd edition). 710 pp.
- Petrov, A, 2016: Detekcija klimatskih fluktuacija Hilbert-Huangovom metodom u podacima opservatorija Zagreb-Grič. Diplomski rad, Geofizički odsjek PMF-a u Zagrebu, 54 str. http://digre.pmf.unizg.hr/4887/1/Petrov_Ana.pdf
- Pielke, R.A., 1984: *Mesoscale Numerical Modeling*. Academic Press, 612 str.
- Rogers, D.P., E.C. Dorman, K.A. Edvards, I.M. Brooks, W.K. Melville, S.D. Burk, W.T. Thompson, T. Holt, L.M. Strom, M. Tjernstrom, B. Grisogono, J.M. Bane, W.A.Nuss, B.M. Morley and A.J. Schanot, 1998: Highlights of coastal waves 1996. *Bul. Am. Meteorol. Soc.* **79**, 1307-1326.
- Sachsperger, J., S. Serafin and V. Grubišić, 2015: Lee waves on the boundary-layer inversion and their dependence on free-atmospheric stability. *Frontiers in Earth Science*. **3**, 14-24, doi: 10.3389/feart.2015.00070
- Scorer, R.S., 1949: Theory of waves in the lee of mountains. *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.* **75**, 41-56.
- Schär, C. and R.B. Smith, 1993a: Shallow-water flow past isolated topography. Part I: Vorticity production and wake formation. *J. Atmos. Sci.* **50**, 1373-1340.
- Schär, C. and R.B. Smith, 1993b: Shallow-water flow past isolated topography. Part II: Transition to vortex shedding. *J. Atmos. Sci.* **50**, 1341-1412.
- Serafin, S., B. Adler, J. Cuxart, S. F. J. De Wekker, A. Gohm, B. Grisogono, N. Kalthoff, D. J. Kirshbaum, M. W. Rotach, J. Schmidli, I. Stiperski, Ž. Večenaj and D. Zardi, 2018: Exchange processes in the atmospheric boundary layer over mountainous terrain. *Atmosphere*, 9 (102), 1-32. <http://www.mdpi.com/2073-4433/9/3/102/pdf>
- Shapiro, A. i E. Fedorovich, 2008: Coriolis effects in homogeneous and inhomogeneous katabatic flows. *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.* **134**, 353-370.
- Smith, R.B., 1977: The steepening of hydrostatic mountain waves. *J. Atmos. Sci.* **34**, 1634-1654.
- Smith, R.B., 1980: Linear theory of stratified hydrostatic flow past an isolated mountain. *Tellus*, **32**, 348-364.
- Smith, R.B., 1985: On severe downslope winds. *J. Atmos. Sci.*, **42**, 2597-2603.
- Smith, R.B., 1987: Aerial observations of the Yugoslavian Bora. *J. Atmos. Sci.* **44**, 269-297.
- Smith, R.B., 1988: Linear theory of stratified flow past an isolated mountain in isosteric coordinates. *J. Atmos. Sci.* **45**, 3889-3896.
- Sorbjan, Z., 1988: Local similarity in the convective boundary layer (CB). *Bound.-Layer Meteorol.* **45**, 237-250.

- Sorbjan, Z., 1989: Local similarity functions derived from second-moment budgets in the convective boundary layer. *Bound.-Layer Meteorol.* **46**, 1-11.
- Stiperski, I., 2005: The causes of supercell development with tornadogenesis on 30th August 2003 – A case study. *Geofizika*, **22**, 83-1004.
- Stiperski, I., I. Kavčič, B. Grisogono i D.R. Durran, 2007: Including Coriolis effects in the Prandtl model for katabatic flow. *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.* **133**, 101-106.
- Stull, R.B., 1988: *An Introduction to Boundary Layer Meteorology*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, the Netherlands, 666 pp.
- Sun, J., C. J. Nappo, L. Mahrt, D. Belušić, B. Grisogono, D. R. Stauffer, M. Pulido, C. Staquet, Q. Jiang, A. Pouquet, C. Yague, B. Galperin, R. B. Smith, J. J. Finnigan, S. D. Mayor, G. Svensson, A. A. Grachev and W. D. Neff, 2015: Review of wave-turbulence interactions in the stable atmospheric boundary layer. *Rev. Geophys.*, **53**, 956-993. <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/2015RG000487/pdf>
- Svensson, G. and A.A.M. Holtslag, 2009: Analysis of model results for the turning of the wind and related momentum fluxes in the stable boundary layer. *Bound.-Layer Meteorol.*, **132**, 261-277.
- Šinik, N i B. Grisogono, 2008: *Dinamička meteorologija - uvod u opću cirkulaciju atmosfere*. Školska knjiga, Zagreb. 213 str.
- Teixeira, M.A.C. i B. Grisogono, 2008: Internal wave drag in stratified flow over mountains on a beta plane. *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.* **134**, 11-19.
- Teixeira, M.A.C., P.M.A. Miranda i R.M.Cardoso, 2008: Asymptotic gravity wave drag expressions for non-hydrostatic rotating flow over a ridge. *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.* **134**, 271-276.
- Telišman, P.T. i B. Grisogono, 2002: Idealised numerical simulations of diurnal sea breeze characteristics over a step change in roughness. *Meteorol. Z.* **11**, 345-360.
- Telišman Pretenjak, M., B. Grisogono i T. Nitis, 2006: Shallow mesoscale flows at the north-eastern Adriatic coast. *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.* **132**, 2191-2216.
- Tennekes, H. i J.L. Lumley, 1972: *A First Course in Turbulence*. MIT Press, 300 pp.
- Tutiš, V. i B. Ivančan-Picek, 1991: Pressure drag on the Dinaric Alps during the ALPEX SOP. *Meteorol. and Atmos. Phys.* **47**, 73-81.
- Večenaj, Ž ., D. Belušić i B. Grisogono, 2010: Characteristics of the near-surface turbulence during a bora event. *Ann. Geophys.* **28**, 155-163, www.ann-geophys.net/28/1/2010/.
- Zardi, D. and C.D. Whiteman, 2013: Diurnal mountain wind systems. *Mountain Weather Research and Forecasting*. Edited by Chao, F.K., S.F.J. de Wekker and B.J. Snyder. Springer, Dordrecht, 35-119 (750 pp.)

Zardi, D., and S. Serafin, 2015: An analytic solution for time-periodic thermally driven slope flows. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **141**, 1968-1974. doi: 10.1002/qj.2485.

Zilitinkevich, S.S., 1972: On the determination of the height of the Ekman boundary layer. *Bound.-Layer Meteorol.* **3**, 141-145.

Zilitinkevich, S. i P. Calanca, 2000: An extended theory for the stably stratified atmospheric boundary layer. *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.* **126**, 1913-1923.

Zilitinkevich, S.S., A. Baklanov, J. Rost, A.-S. Smedman, V. Lykosov i P. Calanca, 2002: Diagnostic and prognostic equations for the depth of the stably stratified Ekman boundary layer. *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.* **128**, 25-46.

Zilitinkevich, S.S., T. Elperin, N. Kleeorin, I. Rogachevskii i I. Esau, 2013: A hierarchy of energy- and flux-budget (FEB) turbulence closure models for stably-stratified geophysical flows. *Bound.-Layer Meteorol.*, **146**, 341-373.

Zilitinkevich, S.S., E. Kadantsev, I. Repina, E. Mortikov i A. Glazunov, 2021: Order out of chaos shifting paradigm of convective turbulence. *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.* **78**, 3925-3932.