14) P val upada na slobodnu površinu. Odredi kuteve incidencije i, koji su rješenja polinoma 3. stupnja, za slučaj kada nema reflektiranih P-valova i $\frac{\alpha}{\beta} = \sqrt{3}$.
(Cilj zadatka: treba znati naći rješenja polinoma 3. stupnja!!!)

$\acute{P}\grave{P} = 0$

$\frac{\alpha}{\beta} = \sqrt{3}$

$i = ?$

rješava se preko dvostrukih kuteva:

$$\acute{P}\grave{P} = \frac{\sin 2i \sin 2j - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \cos^2 2j}{\sin 2i \sin 2j + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \cos^2 2j} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sin 2i \sin 2j = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \cos^2 2j$$

$\sin 2j = 2 \sin j \cos j$

$\cos 2j = \cos^2 j - \sin^2 j \qquad \cos^2 j = 1 - \sin^2 j$

$$\acute{P}\grave{P} = 0 \Rightarrow \quad p = \frac{\sin i}{\alpha} = \frac{\sin j}{\beta} \Rightarrow \sin i = \frac{\alpha}{\beta} \sin j$$

$$\sin j = \frac{\beta}{\alpha} \sin i$$

$$2 \sin 2i \sin j \cos j = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 (1 - 2\sin^2 j)^2$$

$$2 \sin 2i \, \frac{\beta}{\alpha} \sin i \sqrt{1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2}\sin^2 i} = \frac{\alpha^2}{\beta^2}\left(1 - 2\frac{\beta^2}{\alpha^2}\sin^2 i\right)^2$$

$\sin 2i = 2 \sin i \cos i$

$\cos i = \sqrt{1 - \sin^2 i}$

$$2 \cancel{\frac{\beta}{\alpha}} \sin 2i \sin i \cancel{\frac{\beta}{\alpha}} \sqrt{\underbrace{\frac{\alpha^2}{\beta^2}}_{=3} - \sin^2 i} = \frac{\cancel{\alpha^2}}{\cancel{\beta^2}} \frac{\cancel{\beta^4}}{\cancel{\alpha^4}} \left(\frac{\alpha^2}{\beta^2} - 2\sin^2 i\right)^2$$

$$2\left(2 \sin i \sqrt{1 - \sin^2 i}\right) \sin i \sqrt{3 - \sin^2 i} = \left(3 - 2\sin^2 i\right)^2$$

$\vdots$

$$32 \sin^6 i - 168 \sin^4 i + 216 \sin^2 i - 81 = 0$$

Supstitucija: $\sin^2 i = x$

$\longrightarrow$

$f(x) = 32x^3 - 168x^2 + 216x - 81 = 0$

$x_1 = 0{,}75 \Rightarrow i_1 = 60^\circ$

$\cancel{x_2 = 3{,}55} > 1$

$x_3 = 0{,}95 \Rightarrow i_2 = 77{,}2^\circ$

HORNER: ⇒ na webu

nule	32	-168	216	-81
0	32	-168	48	33
0,75	32	-144	108	0
1	32	-136	80	-1

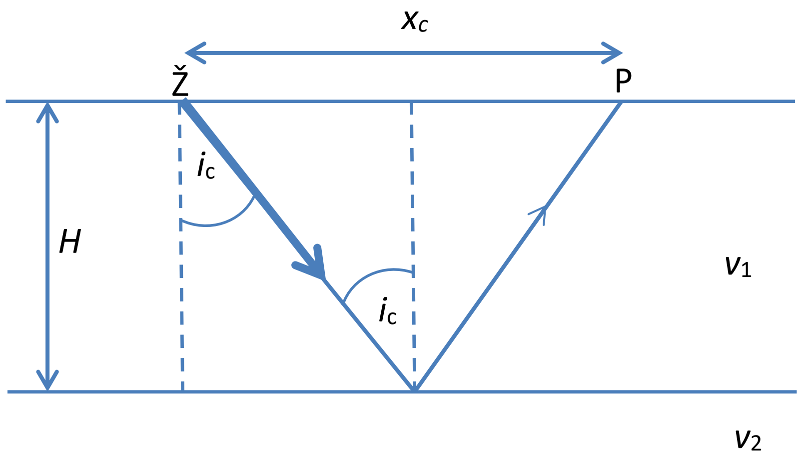
$x_1 = 0{,}75 \Rightarrow i_1 = 60^\circ$

$\cancel{x_2 = 3{,}55} > 1$

$x_3 = 0{,}95 \Rightarrow i_2 = 77{,}2^\circ$

Zadatak 15)

Pretpostavimo model Zemlje s jednim slojem debljine *H* i konstantnom brzinom rasprostiranja seizmičkog vala v_1, a u gornjem sloju plašta brzinom v_2 20% većom od brzine v_1 rasprostiranja seizmičkog vala u kori. Iz žarišta na površini rasprostire se reflektirani val kojem treba 17.2 s da dosegne kritičnu udaljenost od 99km. Izračunajte *H*, v_1 i v_2. Nacrtajte hodokronu (*t*, *x*) za ovaj model s numeričkim vrijednostima.



Kritična udaljenost je udaljenost x_c na kojoj se zraka reflektira s kritičnim kutom na vrhu plašta, i dolazi na površinu . Dana je jednadžbom:

$$x_c = 2H \operatorname{tg} i_c = 99 \text{ km} \qquad (*)$$

gdje je H debljina kore. Znamo relaciju između brzina u kori i plaštu pa možemo izračunati kritičan kut:

$$v_2 = 1.2 v_1 \Rightarrow \frac{\sin i_c}{v_1} = \frac{1}{v_2} \Rightarrow \sin i_c = \frac{1}{1.2} \Rightarrow i_c = 56.44°$$

Uvrštavanjem u jednadžbu (*) dobijemo debljinu sloja *H*:

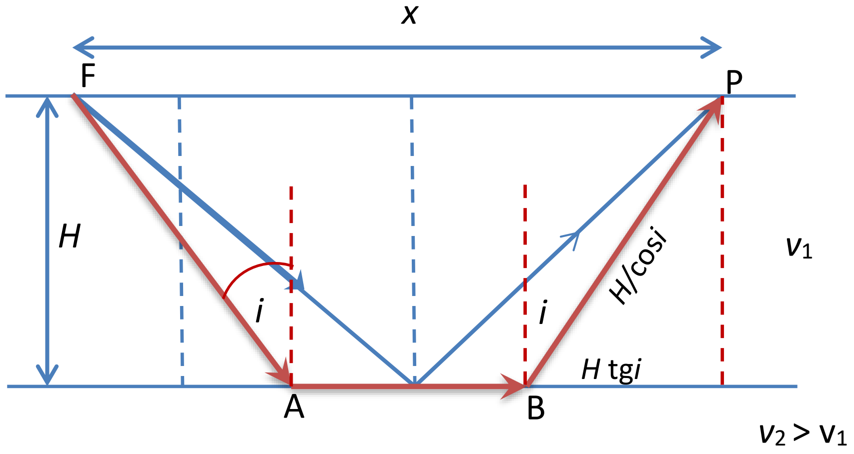
$$99 = 2H \operatorname{tg} 56{,}44° \Rightarrow H = 32{,}8 \text{ km}$$

Vrijeme putovanja kritično reflektirane zrake je:

$$t = 2\frac{H}{v_1 cos i_c} = 2\frac{H}{v_1 \cos 56.44} = 17.2$$

$$\Rightarrow v_1 = 2\frac{32.84}{17.2 \cos 56.44} = 6.9 \text{ km s}^{-1} \Rightarrow v_2 = 8.3 \text{ km s}^{-1}$$

Jednadžbe za crtanje hodokrona za različite udaljenosti direktnih, reflektiranih i kritično refraktiranih valova:



$$t_1 = \frac{x}{v_1}$$

$$t_2 = \frac{2}{v_1}\sqrt{\frac{x^2}{4} + H^2}$$

$$t_3 = \frac{x}{v_2} + \frac{2H\sqrt{v_2^2 - v_1^2}}{v_1 v_2}$$

Za DZ izvedite gornje izraze

$t_{refrakt} = \frac{FA}{v_1} + \frac{AB}{v_2} + \frac{BP}{v_1}$, $x_p \Rightarrow t_{direktni} = t_{refrakt}$

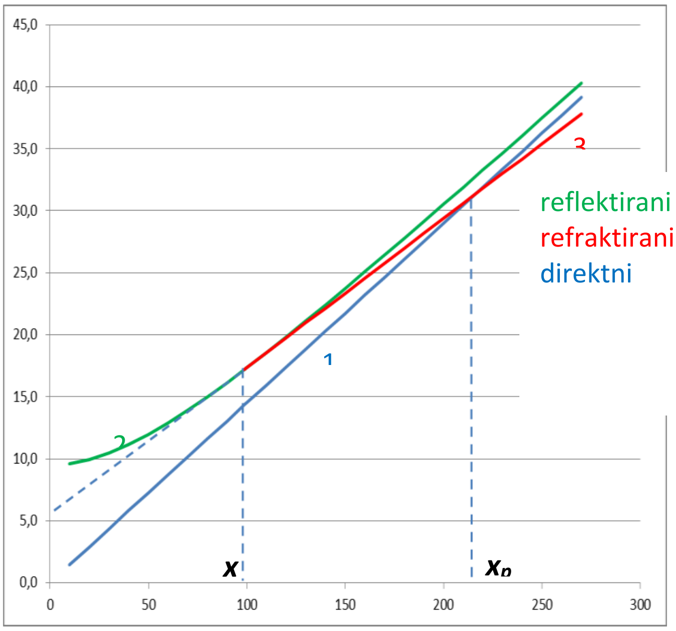
$$\overline{FA} = \frac{H}{v_1 \cos i} = \overline{BP}$$

$$\overline{AB} = x - 2H \operatorname{tg} i$$

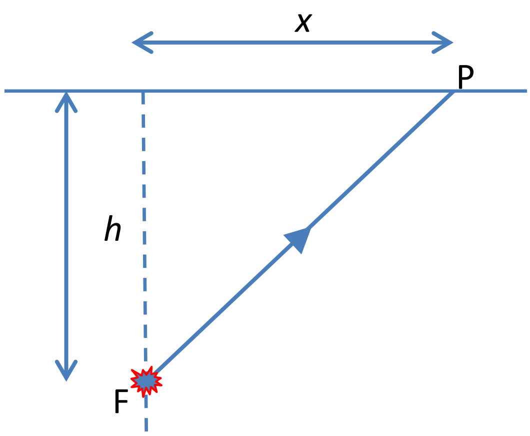
$p = 1/v_2$

$\sin i = p\ v_1 = \frac{v_1}{v_2}$

x	t_1	t_2	t_3
10	1,4	9,6	
30	4,3	10,5	
60	8,7	12,9	
70	10,1	13,9	
99	14,3	17,2	17,2
110	15,9	18,6	18,5
140	20,3	22,4	22,2
160	23,2	25,1	24,6
190	27,5	29,1	28,2
220	31,9	33,3	31,8
250	36,2	37,5	35,4



Zadatak 16)



Na seizmogramu zapisanom u regionalnim udaljenostima, S-P razlika nastupnih vremena je jednaka 5.5s, a žarište je na dubini *x*/2, gdje je *x* epicentralna udaljenost. Model Zemlje se sastoji od jednog sloja Poissonovog omjera σ=0.25, i konstantne brzine S-vala $\sqrt{3}$ km s^{-1}.

Izračunajte:

a) **dubinu žarišta potresa *h***
b) **epicentralnu udaljenost *x***

Za direktni val od točke F do točke P razlika nastupnih vremena S- i P- valova je:

$$t^{S\text{-}P} = 5.5 = \frac{\overline{FP}}{\beta} - \frac{\overline{FP}}{\alpha}$$

Udaljenost FP:

$$\overline{FP} = \sqrt{x^2 + h^2} = \sqrt{x^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} = x\frac{\sqrt{5}}{2}$$

S-P interval:

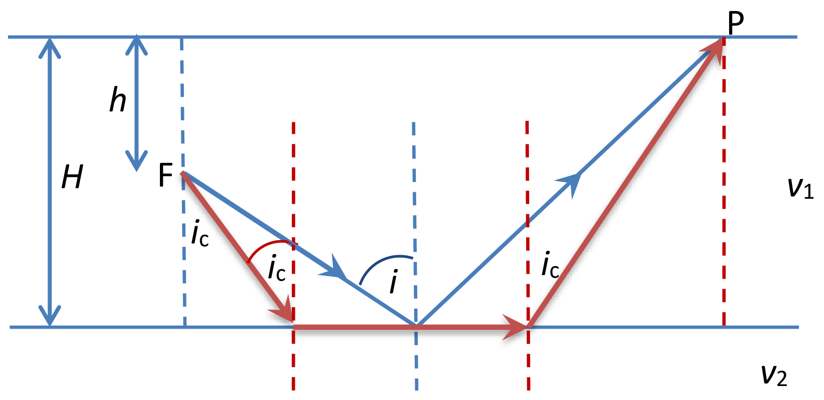
$$5.5 = x\frac{\sqrt{5}}{2}\frac{\alpha - \beta}{\alpha\beta}$$

$$\sigma = 0.25 \Rightarrow \quad \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma} \quad \Rightarrow \alpha = \beta\sqrt{3} \Rightarrow \quad 5.5 = x\frac{\sqrt{5}}{2}\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}\sqrt{3}}$$

$$x = 21 \text{ km}$$

$$h = \frac{x}{2} = 10.5 \text{ km}$$

Zadatak 17)



Model Zemlje s jednim slojem debljine 20 km i brzine seizmičkog vala 6 km s^{-1} iznad sredstva brzine seizmičkog vala 8 km s^{-1}. Žarište potresa je na dubini od 10 km. Izračunajte razliku u nastupnim vremenima između reflektiranog i kritično refraktiranog vala zabilježenog na površini na udaljenosti od 150 km od epicentra.

Problem sličan Zad. 15., ali sada je kritična udaljenost jednaka :

$$x_c = (2H - h)\ \mathrm{tg}\ i_c$$

$$\sin i_c = \frac{v_1}{v_2} = \frac{6}{8} \Rightarrow i_c = 48.6°$$

$$x_c = (2 \times 20 - 10)\ \mathrm{tg}\ (48.6) = 34.0 \text{ km}$$

Kako je 150 km dalje od kritične udaljenosti – do te udaljenosti stižu kritično refraktirani valovi.

Vrijeme putovanja vala reflektiranih (t_2) i kritično refraktiranih (t_3) valova na toj udaljenosti je jednako:

$$t_2 = \sqrt{\frac{x^2 + (2H - h)^2}{v_1}} = \frac{\sqrt{150^2 + (2 \times 20 - 10)^2}}{6} = 25.5 \text{ s}$$

$$t_3 = \frac{x}{v_2} + \frac{2(H - h)\sqrt{v_2^2 - v_1^2}}{v_1 v_2} = \frac{150}{8} + \frac{(2 \times 20 - 10)\sqrt{8^2 - 6^2}}{8 \times 6} = 22.1 \text{ s}$$

$$t_{3\,-}\,t_2 = 22.06 - 24.49 = -3.4 \text{ s}$$

18)

Na seizmogramu razlika nastupnih vremena S- i P-valova iznosi 5,31 s i posljedica je potresa koji se dogodio na žarišnoj dubini $h = 2H$, gdje je H debljina kore. Pretpostavimo da je brzina rasprostiranja P-valova u kori 3 km/s, a ispod kore je poluprostor u kojem su brzine rasprostiranja seizmičkih valova dvostruko veće od onih u kori, te Poissonov omjer iznosi $\nu = 0,25$. Odredite:

a) Izraz za vremena putovanja P i S valova

b) Epicentralnu udaljenost za P-val koji iz žarišta izlazi pod kutem $\theta_h = 30°$

H

$h = 2H$

$t^S - t^P = 5,31\,s$

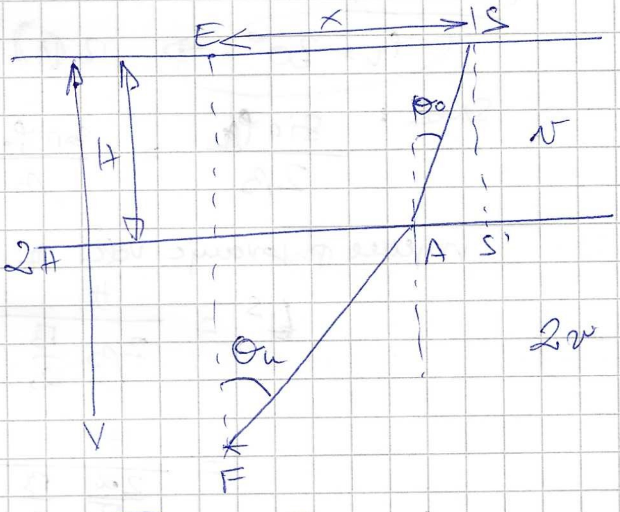
$v_1 = \alpha = 3\,km/s$

$v_2 = 2v_1$

$\nu = 0,25$

a) $t^S = ?$ $t^P = ?$ $x = ?$

b) $x_p = ?$ $\theta_h = 30°$



a) Vrijeme putovanja vala:

$$t = \frac{\overline{FA}}{2v} + \frac{\overline{AS}}{v}$$

$v = \alpha$	za P valove
$v = \beta$	za S valove

SNELL: $$\frac{\sin\theta_h}{2v} = \frac{\sin\theta_0}{v} \Rightarrow \sin\theta_0 = \frac{1}{2}\sin\theta_h$$

sa slike vidimo:

$$\overline{FA} = \frac{H}{\cos\theta_h} \qquad \overline{AS} = \frac{H}{\cos\theta_0}$$

iz tih jednadžbi izvodimo izraz za vrijeme putovanja vala

$$t = \frac{H}{2v\cos\theta_h} + \frac{H}{v\cos\theta_0} \qquad (1)$$

za epicentralne udaljenosti:

$$x = \overline{EA} + \overline{AS'} = H\,tg\,\theta_h + H\,tg\,\theta_0 \qquad (2)$$

iz (1) i (2) ⇒ uvrstimo za P val $v = \alpha$, S val $v = \beta$

⇒ dobijemo analitičke izraze za vrijeme putovanja P odnosno S valova

b) $\sigma = 0{,}25 \Rightarrow \alpha = \sqrt{3}\beta \Rightarrow \beta = \frac{\alpha}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\ \mathrm{km\,s^{-1}}$

$\boxed{\text{P-val}}$:

$\theta_u = 30°$

SNELL: $\frac{\sin\theta_u}{2\alpha} = \frac{\sin\theta_o}{\alpha} \Rightarrow \theta_o = 14{,}47°$

iz (1)

$$t^P = \frac{H}{2\alpha\underbrace{\frac{\sqrt{3}}{2}}_{\cos 30°}} + \frac{H}{\alpha \cdot 0{,}97} = 1{,}61\frac{H}{\alpha}$$

$\boxed{\text{S-val}}$

$\varphi_u = 30° \Rightarrow$ iz (1) vrijeme putovanja vala.

SNELL: $\frac{\sin\varphi_u}{2\beta} = \frac{\sin\varphi_o}{\beta} \Rightarrow \varphi_o = 14.47°$

vrijeme putovanja vala iz (1):

$$t^S = \frac{H}{2\beta\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{H}{\beta\cdot 0{,}97} =$$

$$= \frac{H}{\frac{2\alpha}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{H}{\frac{\alpha}{\sqrt{3}}\cdot 0{,}97} = \frac{H}{\alpha}\left(1 + \frac{1}{\frac{0{,}97}{\sqrt{3}}}\right) =$$

$$= \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{0{,}97}\right)\frac{H}{\alpha} = 2{,}79\frac{H}{\alpha}$$

$\alpha = 3\ \mathrm{km/s}$ (zadano)

H = žarišnu dubinu (hipocentralnu) dobijemo iz t^{S-P}

$$t^{S-P} = 5{,}31 = 2{,}79\frac{H}{3} - 1{,}61\frac{H}{3} \Rightarrow H = 13{,}61\ \mathrm{km}$$

epicentralnu udaljenost iz (2)

$$X = 13{,}61\ \mathrm{tg}\ 30° + 13{,}61\ \mathrm{tg}\ 14.47° = 11.41\ \mathrm{km}$$

$t^P \approx 7{,}3\ \mathrm{km/s}$ $t^S = 12{,}10\ \mathrm{km/s}$