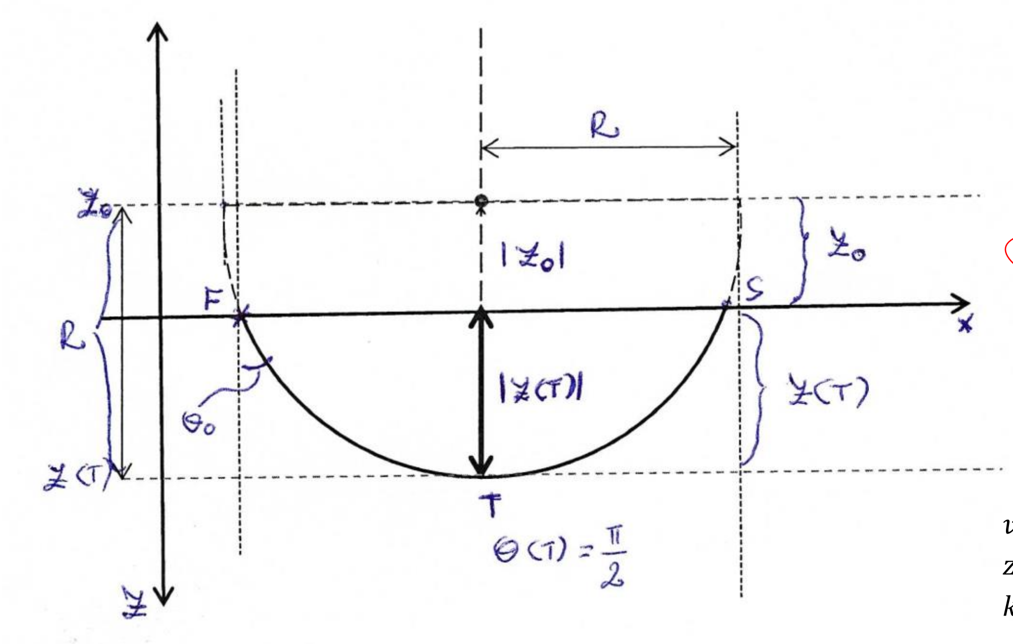
19)

Razmotrimo zraku P-vala koja nastaje na površini ravne, izotropne, nehomogene Zemlje gdje brzina raste linearno s dubinom.

Uporabom Snellova zakona loma pokažite da su sve zrake valova kružni lukovi u xz ravnini. Izvedite analitičke izraze za središta i radijuse tih lukova.



k = gradijent brzine

$\downarrow v = v_0 + kz$

v_0 = brzina na površini

z = dubina

k = konstanta

$$v = v_0 + kz = v(z)$$

Snell:

$$\frac{\sin\theta_0}{v_0} = \frac{\sin\theta(z)}{v(z)} = \frac{\sin\theta(z)}{v_0 + kz} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta(z) = \arcsin\left(\sin\theta_0 + \frac{k\sin\theta_0}{v_0} z\right)}$$

$$\theta(z_T) = \frac{\pi}{2}$$

$$\theta(z_0) = 0$$

$$\theta = 0^\circ \Rightarrow z_0 = -\frac{v_0}{k}$$

$$0 = \sin\theta_0 + \frac{k\sin\theta_0}{v_0} z_0 \Rightarrow z_0 = -\frac{v_0}{k}$$

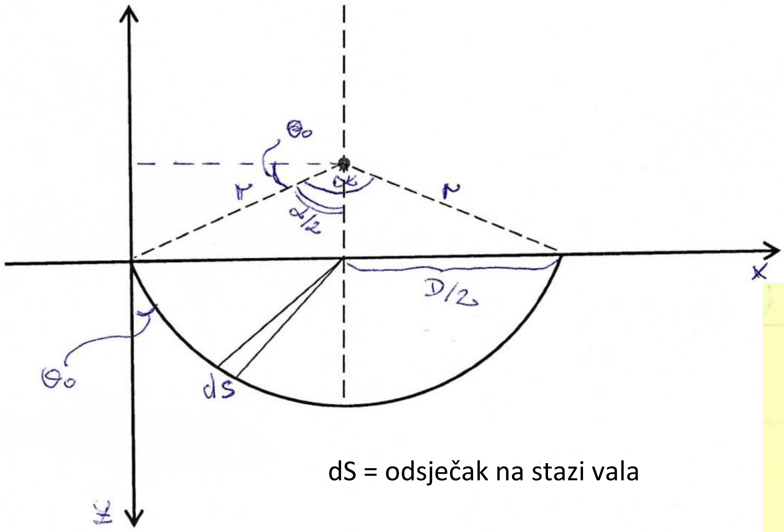
$$\theta = 90^\circ \Rightarrow z_T = \frac{(1 - \sin\theta_0) v_0}{k \sin\theta_0}$$

$$1 = \sin\theta_0 + \frac{k\sin\theta_0}{v_0} z_T \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z_T = \frac{(1 - \sin\theta_0) v_0}{k\sin\theta_0}$$

$$R = |z_0| + |z_T| \Rightarrow R = \frac{v_0}{k\sin\theta_0}$$

20) Pretpostaviti ćemo model kore debljine 20 km gdje brzina rasprostiranja P-vala varira od 6.0 km/s na vrhu do 6.5 km/s na dnu kore (dakle imamo konstantni gradijent brzine od 0,025 s^{-1}), Na dubinama ispod 20 km model se sastoji od poluprostora s brzinom 6.5 km/s na vrhu, te gradijentom brzine 0.1 s^{-1}. Izvedite analitičke izraze za horizontalnu komponentu staze zrake vala D, te za vrijeme putovanja zrake vala.



dS = odsječak na stazi vala

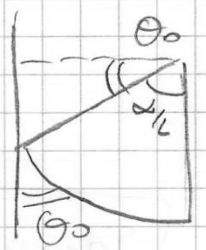
Zadatak [19] :

$v = v_0 + kz = v(z)$

$v_0 = v(0)$

SNELL: $\theta(z) = \arcsin\left(\sin\theta_0 + \frac{k\sin\theta_0}{v_0} z\right)$

$$\boxed{r = \frac{v_0}{k\sin\theta_0}}$$



Iz geometrije vrijedi: $\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} - \theta_0$

$\Rightarrow \alpha = \pi - 2\theta_0$

$\frac{D}{2} = r\sin\frac{\alpha}{2} \Rightarrow D = 2r\cos\theta_0 \Rightarrow D = 2\frac{v_0}{k\sin\theta_0}\cos\theta_0$

$$\Rightarrow \boxed{D = 2\frac{v_0 \operatorname{ctg}\theta_0}{k}}$$

Ukupna duljina staze zrake vala je kružni luk duljine S:

$S = r \cdot \alpha = r(\pi - 2\theta_0) \Rightarrow S = \frac{(\pi - 2\theta_0)v_0}{k\sin\theta_0}$

u radijanima!!!

Vrijeme putovanja vala stazom S je:

$$T = \int_S \frac{ds}{v(z)}$$

gdje je

$$v(\Theta) = v_0 + k\, z(\Theta)$$

Znamo:

$$v(z) = v_0 + kz = \frac{\sin\Theta(z)}{\sin\Theta_0} v_0 \qquad (*)$$

$$\Rightarrow \quad z = \frac{v_0}{k\sin\Theta_0}\left[\underbrace{\sin\Theta_z}_{\sin\Theta} - \sin\Theta_0\right]$$

$$\frac{v_0}{k\sin\Theta_0} = r$$

$$\Rightarrow \quad v(\Theta) = v_0 + kr(\sin\Theta - \sin\Theta_0) \Rightarrow$$

SNELLOV ZAKON $\Rightarrow$ $(*)$ $\Rightarrow$ $v(z) = \dfrac{v_0 \sin\Theta_z}{\sin\Theta_0}$

Također imamo

$$S = \alpha \cdot r \quad \Rightarrow \quad ds = |d\alpha| \cdot r = 2\, d\Theta\, r = 2\frac{v_0}{k\sin\Theta_0} d\Theta$$

Tada nam gornji integral poprima sljedeći oblik:

$$T = \int \frac{2 v_0}{k\sin\Theta_0} \frac{\sin\Theta_0}{v_0 \sin\Theta(z)} d\Theta = \frac{2}{k}\int_{\Theta_0}^{\Theta_f} \frac{d\Theta}{\sin\Theta} = \frac{2}{k}\ln\left[\operatorname{tg}\frac{\Theta}{2}\right]_{\Theta_0}^{\Theta_f} =$$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{2}{k}\left[\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\Theta_f}{2}\right) - \ln\left(\operatorname{tg}\frac{\Theta_0}{2}\right)\right]$$

ZA ZRAKE KOJE PROLAZE SAMO KROZ KORU JE

$$\Theta_f = \frac{\pi}{2} \Rightarrow T_n = -\frac{2}{k_n}\ln\left(\operatorname{tg}\frac{\Theta_0}{2}\right)$$

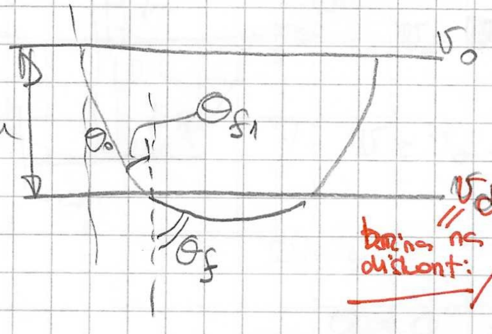
gdje je k_n gradijent brzine u kori

ZA ZRAKE KOJE ZALAZE U PLAŠT MORAMO

dodati vrijeme putovanja donjim sredstvom:

$$\boxed{T_2 = \frac{2}{k_1}\left[\ln\left(tg\frac{\theta_f}{2}\right) - \ln\left(tg\frac{\theta_0}{2}\right)\right] - \frac{2}{k_2}\ln\left(tg\frac{\theta_f}{2}\right)}$$

gdje je θ_f kut pod kojim zraka vala nailazi na plohu s diskontinuitetom gradijenta brzine



brzina na diskont.

$\theta_{f1} = \theta_f \Rightarrow$ jer nema diskontinuiteta brzine (samo je $k_1 \neq k_2$) samo se promijenio gradijent

$v_d = v_0 + k_1 h \rightarrow$ zbog kontinuiranog prirasta brzine

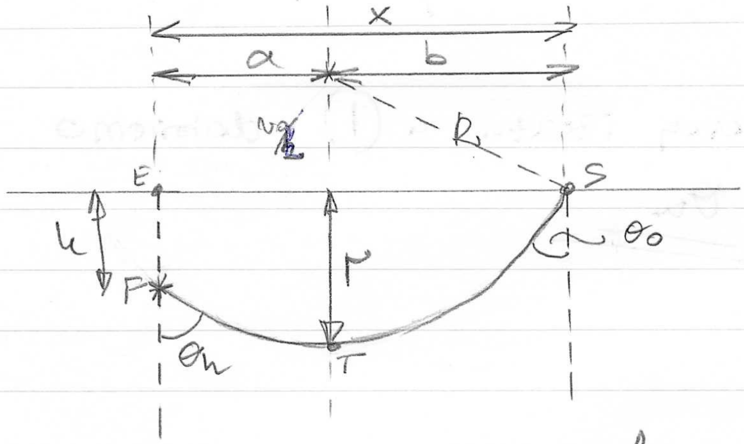
SNELLOV ZAKON LOMA:

$$\frac{\sin\theta_f}{v_d} = \frac{\sin\theta_0}{v_0} \Rightarrow$$

$$\boxed{\Rightarrow \theta_f = \arcsin\left(\sin\theta_0 + \frac{h k_1}{v_0}\sin\theta_0\right)}$$

gdje je h dubina plohe diskontinuiteta gradijenta

21a) Za žarište na dubini h izračunajte izraz za kut pod kojim zraka izlazi iz žarišta potresa θ_h u izrazima epicentralne udaljenosti x, v_0, h i k.



$\theta_T = 90^\circ$

SNELL: $$\frac{\sin\theta_0}{v_0} = \frac{\sin\theta_r}{v_0+kr} = \frac{1}{v_0+kr} = \frac{\sin\theta_h}{v_0+kh} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin\theta_h = \frac{v_0+kh}{v_0+kr} \qquad (1)$$

Problem je riješen ako r izrazimo kao funkciju od x, v_0, h i k

Epicentralna udaljenost $x = a+b$

$$b = \sqrt{R^2 - \left(\frac{v_0}{k}\right)^2}$$

Zrake valova čije brzine rastu linearno s dubinom su kružni lukovi i njihov polumjer je:

$$R = \frac{v_0}{k} + r \Rightarrow b = \sqrt{\left(\frac{v_0}{k}+r\right)^2 - \left(\frac{v_0}{k}\right)^2}$$

i $$a = \sqrt{\underbrace{\left(\frac{v_0}{k}+r\right)^2}_{=R^2} - \left(\frac{v_0}{k}+h\right)^2}$$

$b = x - a \Rightarrow$

$$\sqrt{\left(\frac{v_0}{k}+r\right)^2 - \left(\frac{v_0}{k}\right)^2} = x - \sqrt{\left(\frac{v_0}{k}+r\right)^2 - \left(\frac{v_0}{k}+h\right)^2}$$

Riješimo li za $\underline{\underline{r}}$

$$r = \sqrt{\left(\frac{x^2 - h^2 - 2\frac{v_0}{k}h}{2x}\right)^2 + \left(\frac{v_0}{k} + h\right)^2} - \frac{v_0}{k}$$

Supstitucijom ovog izraza u (1) dobijemo izraz za $\underline{\underline{\vartheta_u}}$

DZ:

21 b)

Pretpostavimo poluprostor u kom brzina raste s dubinom prema izrazu

$$v_h = 4 + 0.1 \cdot z$$

Žarište potresa je na dubini od 10 km.

Izračunajte epicentralnu udaljenost za val koji izlazi iz žarišta pod kutem od 30°.

-------------------------- ---------------------------

(skica je ista kao u zadatku 21a)